

ELECTROMAGNETISME

Première Partie : Quelques aspects fondamentaux de l'électromagnétisme

A. Des équations de Maxwell

- I. ♦ Coulomb Charles (1736-1806) : met en évidence expérimentalement la loi d'interaction électrostatique en $\frac{1}{r^2}$ (loi de Coulomb).
- ♦ Ampère André-Marie (1775-1836) : origine électrique du magnétisme (courants ampériens), travaux sur les forces d'interaction entre circuits, théorème dit d'Ampère.
- ♦ Faraday Michael (1791-1867) : lois expérimentales de l'induction électromagnétique.
- ♦ Maxwell James Clerk (1831-1879) : réalise la synthèse de l'électromagnétisme en unifiant électricité, magnétisme, induction, et en prévoyant l'existence des ondes électromagnétiques. Il est à noter que Maxwell n'est pas l'auteur formel des célèbres équations de Maxwell, même si les idées fondamentales qui s'y cachent lui sont dues sans doute possible. C'est Oliver Heaviside, élève de Maxwell qui mettra les idées de Maxwell en forme et produira formellement le système des « équations de Maxwell ».
- ♦ Hertz Heinrich (1857-1894) : réussit, en 1886, à produire et à détecter des ondes électromagnétiques. Il apporte ainsi, vingt ans après, la confirmation expérimentale à la théorie de Maxwell.
- ♦ Lorentz Hendrik Antoon (1853-1928) : auteur de la célèbre transformation de Lorentz, qui permettra de donner à l'électromagnétisme son cadre naturel : la relativité.
- ♦ Lorenz Ludwig (1829-1891) : même si ce n'est pas à lui que l'énoncé pensait, on pouvait évoquer son nom car il fut l'un des premiers à développer la théorie de Maxwell et à utiliser les potentiels scalaire et vecteur...

II. ♦ $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{ext} dS = \frac{Q^{int}}{\epsilon_0}$: théorème de Gauss

$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I^{int} + \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \right)$: théorème d'Ampère

$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \right)$: loi de Faraday

$\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{ext} dS = 0$: champ magnétique à flux conservatif

- ♦ Pour fonder l'électromagnétisme, il faut ajouter, ou bien la loi de force de Lorentz, qui définit l'interaction électromagnétique, ou bien, l'expression du vecteur de Poynting, qui caractérise les échanges énergétiques.

B. De l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires...

I. Condensateur plan en régime sinusoïdal forcé : première approche.

1.a. La symétrie de révolution d'axe Oz ainsi que l'existence des plans de symétrie contenant l'axe Oz

impliquent :
$$\begin{cases} \vec{E}(r,t) = E_r(r,z,t)\vec{u}_r + E_z(r,z,t)\vec{u}_z \\ \vec{B}(r,t) = B_\theta(r,z,t)\vec{u}_\theta \end{cases}$$

Si $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$, $\frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial r}$, soit en ordre de grandeur : $\frac{|E_r|}{e} \approx \frac{|E_z|}{R}$, donc : $\frac{|E_r|}{|E_z|} \approx \frac{e}{R} \ll 1$.

1.b. Dans ces conditions, la composante radiale du champ électrique est bien négligeable et on peut donc écrire : $\vec{E}(r,t) \approx E_z(r,z,t)\vec{u}_z$. De plus, l'espace inter-armatures étant vide de charges,

$\text{div } \vec{E} = 0$, soit $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. Enfin, \vec{E} n'étant fonction que de r et t , l'équation de Maxwell-Faraday

implique que \vec{B} aussi ne dépende que de r et t .

Conclusion :
$$\begin{cases} \vec{E}(r,t) = E_z(r,t)\vec{u}_z \\ \vec{B}(r,t) = B_\theta(r,t)\vec{u}_\theta \end{cases}$$

2. Les équations de Maxwell donnent l'équation de d'Alembert, qui s'écrit simplement pour \vec{E} :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

3. L'équation de Maxwell-Faraday donne immédiatement :
$$\underline{B}(r,t) = -i \frac{E_0}{\omega} e'(r) \exp(i\omega t)$$

4. On déduit de la question précédente que $e(r)$ vérifie l'équation : $e''(r) + \frac{1}{r} e'(r) + \frac{\omega^2}{c^2} e(r) = 0$. En

posant $u = \frac{\omega r}{c}$, il vient (puisque $\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\omega}{c} \frac{\partial e}{\partial u}$) :
$$e''(u) + \frac{1}{u} e'(u) + e(u) = 0.$$

5.a. L'équation de Maxwell-Ampère, ou le théorème d'Ampère écrit le long d'un cercle orienté d'axe

Oz, et de rayon r donne :
$$\underline{B}_1(r,t) = \frac{i\omega}{2c^2} r E_0 \exp(i\omega t).$$

5.b. Il s'agit d'un phénomène d'induction (de Neumann). L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\underline{E}_2(r,t) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 \exp(i\omega t).$$
 Ce champ électrique doit s'annuler sur l'axe car il est dû au champ

perturbatif $\underline{B}_1(r,t) = \frac{i\omega}{2c^2} r E_0 \exp(i\omega t)$, lequel s'annule sur l'axe.

5.c. Le théorème d'Ampère donne, en partant de $\underline{E}_2(r,t)$:
$$\underline{B}_3(r,t) = -\frac{i\omega^3}{16c^4} r^3 E_0 \exp(i\omega t).$$

La loi de Faraday donne, en partant de $\underline{B}_3(r,t)$:
$$\underline{E}_4(r,t) = \frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 \exp(i\omega t).$$

5.d. On somme les différentes contributions : $\underline{E}(r,t) = \underline{E}_0(r,t) + \underline{E}_2(r,t) + \underline{E}_4(r,t) + \dots$ et on trouve :

$$\underline{E}(r,t) = E_0 \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{64} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 + \dots \right) \exp(i\omega t).$$

Le développement limité de $e\left(\frac{\omega r}{c}\right)$ à l'ordre 4 s'écrit donc : $e\left(\frac{\omega r}{c}\right) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^4 + \dots$

5.e. Le développement à l'ordre 3 du champ magnétique s'écrit donc (d'après la question 3) :

$$\underline{B}(r,t) = iB_0 \exp(i\omega t) \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\omega r}{c}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^3 + \dots \right) \quad \text{où} \quad B_0 = \frac{E_0}{c}$$

5.f. On applique le théorème de Gauss à une surface cylindrique fermée « à cheval » sur l'armature du haut, et on ne retient que le terme dominant dans l'expression de $\underline{E}(r,t)$ (la solution trouvée étant

valide à toute fréquence, on choisit ici de se placer en basse fréquence). On obtient : $E_0 = -\frac{Q_0}{\epsilon_0 S}$ et

$$B_0 = -\frac{Q_0}{\epsilon_0 c S}$$

5.g. On a trouvé en d. les premiers termes du développement en série de la fonction de Bessel

$$J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2k} \quad \text{et en e. les premiers termes de la série :}$$

$$J_0'\left(\frac{\omega r}{c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)!} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^{2k+1} = J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \quad \text{Les résultats sont évidemment cohérents.}$$

II. Solénoïde infini en régime sinusoïdal forcé.

1. Le modèle du solénoïde infini consiste à négliger les effets de bords. Il est valide tant que sa longueur est très supérieure à son rayon.

Les symétries et invariances donnent le cas dual du précédent : a priori,

$$\begin{cases} \vec{B}(r,t) = B_r(r,z,t)\vec{u}_r + B_z(r,z,t)\vec{u}_z \\ \vec{E}(r,t) = E_\theta(r,z,t)\vec{u}_\theta \end{cases} \quad \text{De plus, l'équation de Maxwell-Thomson donne :}$$

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad \text{Donc, } \left| \frac{B_z}{B_r} \right| \approx \frac{l}{R} \gg 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} \approx 0. \quad \text{Enfin, l'équation de Maxwell-}$$

Ampère permet d'affirmer que si \vec{B} ne dépend que de r et t , alors il en est de même pour \vec{E} .

$$\text{Conclusion : } \begin{cases} \vec{B}(r,t) = B_z(r,t)\vec{u}_z \\ \vec{E}(r,t) = E_\theta(r,t)\vec{u}_\theta \end{cases}$$

2. L'équation de d'Alembert pour \vec{B} est l'équation que vérifiait \vec{E} précédemment :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0.$$

3. La géométrie des champs est permutée par rapport au cas précédent. Par conséquent,

$$\underline{B}(r,t) = B_0 e\left(\frac{\omega r}{c}\right) \exp(i\omega t) = B_0 \left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^4 + \dots \right) \exp(i\omega t).$$

L'équation de Maxwell-Ampère nous donne : $\underline{E}(r,t) = icB_0 e'(u) \exp(i\omega t)$ soit :

$$\underline{E}(r,t) = icB_0 \left(-\frac{1}{2} \frac{\omega r}{c} + \frac{1}{16} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^3 + \dots \right) \exp(i\omega t).$$

4. On se place en basse fréquence (et on ne conserve donc que le terme dominant dans $\underline{B}(r,t)$). Une application élémentaire du théorème d'Ampère donne : $\underline{B}_0 = \mu_0 n I_0$ et $\underline{E}_0 = \mu_0 c n I_0$ (définition de cette dernière grandeur ambiguë).

III. Considérations énergétiques en régime « lentement variable ».

1. La taille d'un montage électronique ou électrique usuel est au (grand) maximum de l'ordre de quelques dizaines de centimètres à 1 m. Pour que l'approximation proposée soit valide, il suffit que $f \ll \frac{c}{2\pi r}$, soit $f \ll 10$ MHz (en prenant 1 m).

2. ♦ Pour le condensateur,
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\vec{E}} \approx E_0 \exp(i\omega t) \underline{\vec{u}}_z \\ \underline{\vec{B}}(r,t) \approx \frac{i}{2c} \frac{\omega r}{c} E_0 \exp(i\omega t) \underline{\vec{u}}_\theta \end{array} \right.$$
 à l'ordre le plus bas en

$\frac{\omega r}{c}$. Alors, $\left| \frac{E}{cB} \right| \approx \frac{c}{\omega r} \gg 1$. Le condensateur est un système « dominante électrique ».

- ♦ Pour le solénoïde,
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\vec{B}} \approx B_0 \exp(i\omega t) \underline{\vec{u}}_z \\ \underline{\vec{E}}(r,t) \approx -\frac{ic}{2} \frac{\omega r}{c} B_0 \exp(i\omega t) \underline{\vec{u}}_\theta \end{array} \right.$$
 à l'ordre le plus bas en $\frac{\omega r}{c}$.

Alors, $\left| \frac{E}{cB} \right| \approx \frac{\omega r}{c} \ll 1$. Le solénoïde est un système « dominante magnétique ».

3. ♦ Pour le condensateur,

$$u_{em}(r,t) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \left(\cos^2(\omega t) + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \sin^2(\omega t) \right) \approx \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(\omega t). \text{ L'énergie}$$

magnétique est négligeable devant l'énergie électrique : $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \gg \frac{B^2}{2\mu_0}$

- ♦ Pour le solénoïde,

$$u_{em}(r,t) = \frac{(\mu_0 n I_0)^2}{2\mu_0} \left(\cos^2(\omega t) + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \sin^2(\omega t) \right) \approx \frac{(\mu_0 n I_0)^2}{2\mu_0} \cos^2(\omega t). \text{ L'énergie}$$

électrique est négligeable devant l'énergie magnétique : $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \ll \frac{B^2}{2\mu_0}$

- ♦ Dans le cas d'une OPP dans le vide, il y a équirépartition de la densité d'énergie :

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

4. ♦ Pour le condensateur :
$$\underline{\vec{\Pi}}(r,t) = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c} \frac{\omega r}{c} \sin(2\omega t) \underline{\vec{u}}_r.$$

- ♦ Pour le solénoïde :
$$\underline{\vec{\Pi}}(r,t) = \frac{cB_0^2}{4\mu_0} \frac{\omega r}{c} \sin(2\omega t) \underline{\vec{u}}_r.$$

5. ♦ Pour le condensateur :

$$P^{ext} = \oint_{\text{surface intérieure}} \underline{\vec{\Pi}}(r,t) \cdot \underline{\vec{n}}^{ext} dS = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c} \frac{\omega R}{c} \sin(2\omega t) e \cdot 2\pi R = \frac{\pi e R E_0^2}{2\mu_0 c} \frac{\omega R}{c} \sin(2\omega t). \text{ Or}$$

l'énergie électromagnétique stockée dans le condensateur vaut (cf. 3) :

$U_{\dot{e}m}(t) \approx \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(\omega t) e \pi R^2$. On vérifie aisément que : $\boxed{\frac{dU_{\dot{e}m}}{dt} = -P^{ext}}$, ce qui traduit la conservation de l'énergie.

◆ Pour le solénoïde :

$$P^{ext} = \oint\limits_{\substack{\text{surface} \\ \text{intérieure}}} \vec{\Pi}(r,t) \cdot \vec{n} \, dS = \frac{cB_0^2}{4\mu_0} \frac{\omega R}{c} \sin(2\omega t) l \cdot 2\pi R = \frac{c\pi R B_0^2}{2\mu_0} \frac{\omega R}{c} \sin(2\omega t). \text{Et}$$

l'énergie stockée dans la bobine vaut : $U_{\dot{e}m}(t) \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cos^2(\omega t) l \pi R^2$. On vérifie

aisément que : $\boxed{\frac{dU_{\dot{e}m}}{dt} = -P^{ext}}$, ce qui traduit la conservation de l'énergie.

IV. L'ARQS : premier contact

- ◆ Dans un système à dominante électrique comme le condensateur, on voit de voir que le champ électrique a la même structure qu'en électrostatique en basse fréquence (cf. IV. 2). Donc l'équation de Maxwell-Faraday se réduit à $\boxed{\text{rot} \vec{E} = \vec{0}}$.

En revanche, le champ magnétique étant dû aux variations du champ électrique (cf. calcul), il

nous faut garder l'équation de Maxwell-Ampère intégrale : $\boxed{\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$.

- ◆ Dans un système à dominante magnétique comme le solénoïde, le champ magnétique a la même expression qu'en statique en basse fréquence (cf. IV.2). Donc l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit de manière approchée : $\boxed{\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$.

Par contre, le champ électrique, ainsi qu'on l'a vu est induit par les variations du champ

magnétique. Donc, il faut conserver l'équation de Maxwell-Faraday intégrale : $\boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$.

- Non, on ne peut pas parler sans ambiguïté de l'ARQS, et encore moins énoncer les équations de Maxwell dans ladite approximation.

V. Potentiels retardés. Définition de l'ARQS

- L'équation de Maxwell-Thomson $\text{div} \vec{B} = 0$ équivaut à l'existence d'un potentiel vecteur \vec{A} tel que $\boxed{\vec{B} = \text{rot} \vec{A}}$.

L'équation de Maxwell-Faraday, qu'on peut formuler ainsi : $\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$, implique

l'existence d'un potentiel scalaire V tel que $\boxed{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} V}$.

- \vec{A} est défini à un gradient près : $\vec{A}_1 = \vec{A} + \text{grad} \Phi$ convient tout aussi bien ; puisqu'il donne le même champ magnétique \vec{B} . Du coup, le potentiel scalaire V_1 défini par :

$V_1 = V - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{cste}(t)$ convient puisqu'associé à $\vec{A}_1 = \vec{A} + \text{grad} \Phi$, il donne le bon champ électrique \vec{E} .

Conclusion : les couples $[\vec{A}, V]$ et $[\vec{A}_1, V_1]$ sont équivalents.

On choisit alors la jauge de Lorentz : $\boxed{\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$.

2. Moyennant l'adoption de la condition de jauge de Lorentz, on obtient classiquement les

équations de propagation des potentiels :

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \\ \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

3. $\frac{L}{c}$ est évidemment le temps de propagation du signal sur la distance caractéristique L .

Pour un circuit usuel : (taille < 1 m, fréquence < 1 MHz), $\alpha \approx 10^{-3} \ll 1$: on est dans l'ARQS.

Pour une ligne haute tension (taille ≈ 1 km, fréquence 50 Hz), $\alpha \approx 0,1$: c'est tangent.

Pour une antenne TV (taille ≈ 10 m, fréquence 500 MHz), $\alpha \approx 10$: on n'est plus dans l'ARQS.

Pour l'optique visible (taille : du mm au m, $\lambda \approx 500$ nm), $\alpha \approx 10^3$ à 10^6 : la propagation domine.

4. Dans l'ARQS, puisqu'on néglige le phénomène de propagation,

$$\begin{cases} V(M,t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P,t)}{PM} d^3V \\ \vec{A}(M,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P,t)}{PM} d^3V \end{cases}$$

Ces expressions étant celles de la statique, les potentiels vérifient donc leur équation de Poisson

respective comme en statique (sauf que les sources dépendent du temps) :

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \\ \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

VI. Les deux limites de l'ARQS.

1. $\beta = \frac{\tilde{j}}{c\tilde{\rho}}$ est le rapport d'une densité de courant (en A.m⁻²) et du produit $c\tilde{\rho}$ (en m.s⁻¹.C.m⁻³ = A.m⁻²).

C'est bien un nombre sans dimension.

Des expressions des potentiels dans l'ARQS, on tire : $\tilde{V} = \frac{\tilde{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \frac{V}{L}$ et $\tilde{A} = \frac{\mu_0 \tilde{j}}{4\pi} \frac{V}{L}$. Donc

$$\frac{c\tilde{A}}{\tilde{V}} = \frac{\tilde{j}}{c\tilde{\rho}} = \beta.$$

2.a. En ordres de grandeur, $\left\| \overrightarrow{-gradV} \right\| \approx \frac{\tilde{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \frac{V}{L} \frac{1}{d}$ et $\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\| \approx \frac{\mu_0 \tilde{j}}{4\pi} \frac{V}{L} \frac{1}{\tau}$ donc :

$$\frac{\left\| \overrightarrow{-gradV} \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\|} \approx \frac{\frac{\tilde{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \frac{V}{L} \frac{1}{d}}{\frac{\mu_0 \tilde{j}}{4\pi} \frac{V}{L} \frac{1}{\tau}} = \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{c\tau}{d} \geq \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{c\tau}{L} \text{ soit } \left\| \overrightarrow{-gradV} \right\| \geq \frac{1}{\alpha\beta} \gg 1. \text{ On en déduit que}$$

$\vec{E} \approx -\overrightarrow{gradV}$ et que $\overrightarrow{rotE} \approx \vec{0}$. Le champ électrique a les propriétés d'un champ électrostatique.

2.b. $\frac{\left\| \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \overrightarrow{rotB} \right\|} \approx \frac{\left\| \overrightarrow{-gradV} \right\|}{c^2 \tau \left\| \overrightarrow{rotB} \right\|} \approx \frac{1}{c^2 \tau} \frac{\tilde{V}}{\tilde{A}} = \frac{\tilde{V}}{c\tilde{A}} \frac{d}{c\tau} \leq \frac{\alpha}{\beta}$, ce dont on ne peut rien dire...

Remarque : on peut aussi regarder : $\frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\vec{j}} \approx \frac{\left\| -\text{grad}V \right\|}{\vec{j}} \approx \frac{\varepsilon_0 \tilde{V}}{4\pi L \tilde{A}} \approx \frac{1}{c^2} \frac{\tilde{V}}{\tilde{A}} \frac{V}{dL\tau} \approx \frac{\alpha}{\beta}$: même

conclusion. Il faut donc conserver l'équation de Maxwell-Ampère dans son intégralité :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

2.c. $\frac{c\tilde{B}}{\tilde{E}} \leq c \frac{\tilde{A}}{\tilde{V}} \approx \frac{c\tilde{A}}{\tilde{V}} = \beta \ll 1$. L'effet du champ magnétique est donc négligeable devant l'effet du champ électrique.

2.d. Evaluons : $\frac{1}{c^2} \frac{\left| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right|}{\left| \text{div} \vec{A} \right|} \approx \frac{\tilde{V}}{c\tilde{A}} \frac{d}{c\tau} \leq \frac{\tilde{V}}{c\tilde{A}} \frac{L}{c\tau} \approx \frac{\alpha}{\beta}$: on ne peut rien dire. La jauge de Lorentz ne se

simplifie pas dans l'ARQS électrique.

2.e. Calculons le rapport : $\frac{\left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|}{\left| \text{div} \vec{j} \right|} \approx \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{d}{\tau} \leq \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{L}{\tau} = \frac{\alpha}{\beta}$: pas de simplification possible. En effet, dans un

système électrique comme un condensateur, la densité de courant de déplacement joue un rôle essentiel pour « permettre » la charge. La négliger reviendrait à considérer le rapport précédent très inférieur à 1, ce qui n'est pas.

3. On suppose ici seulement qu'on est dans l'ARQS : $\alpha \ll 1$. On écrit l'identité :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{A}.$$

Or, $\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}$ (jauge de Lorentz) et $\overrightarrow{\Delta} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ (ARQS : cf. V.4). On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right).$$

4.a. Evaluons le rapport : $\frac{\left\| -\frac{1}{c^2} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right) \right\|}{\left\| \mu_0 \vec{j} \right\|} \approx \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\tilde{V}}{\tilde{j}} \approx \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{1}{\tau d} \frac{\tilde{\rho} V}{4\pi \varepsilon_0 L}$, soit :

$$\frac{\left\| -\frac{1}{c^2} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right) \right\|}{\left\| \mu_0 \vec{j} \right\|} \approx \frac{1}{\tau} \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{V}{4\pi dL} \approx \frac{L}{c\tau} \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} = \frac{\alpha}{\beta} \ll 1.$$

Conclusion : dans l'ARQS magnétique, l'équation de Maxwell-Ampère prend la forme simplifiée suivante : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$. La densité de courant de déplacement n'est donc négligeable que dans l'ARQS magnétique.

4.b. Calculons le rapport $\frac{\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\|} \approx \frac{\frac{\tilde{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \frac{V}{L} \frac{1}{d}}{\frac{\mu_0 \tilde{j}}{4\pi} \frac{V}{L} \frac{1}{\tau}} = \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{c\tau}{d} \geq \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{c\tau}{L}$ soit $\frac{\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\|} \geq \frac{1}{\alpha\beta}$: on ne

peut rien conclure. Donc on doit écrire dans l'ARQS magnétique : $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}V$ et

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4.c. Le rapport $\frac{\tilde{E}}{c\tilde{B}}$ est assez délicat à calculer. En effet : $\tilde{E} \leq \frac{\tilde{V}}{d} + \frac{\tilde{A}}{\tau}$ donc : $\tilde{E} \leq \frac{\tilde{\rho}V}{4\pi\epsilon_0 Ld} + \frac{\mu_0 \tilde{j}V}{4\pi L\tau}$.

De plus, $\left\| \text{rot} \vec{B} \right\| \leq \frac{\tilde{B}}{d}$ donc $\frac{\tilde{B}}{d} \geq \mu_0 \tilde{j}$. Par conséquent, $\frac{\tilde{E}}{c\tilde{B}} \leq \frac{1}{\mu_0 c d \tilde{j}} \left(\frac{\tilde{\rho}V}{4\pi\epsilon_0 Ld} + \frac{\mu_0 \tilde{j}V}{4\pi L\tau} \right)$ soit

$\frac{\tilde{E}}{c\tilde{B}} \leq \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{V}{4\pi d^2 L} + \frac{L}{c\tau} \frac{V}{4\pi L^2 d} \approx \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} + \frac{L}{c\tau}$. Conclusion : $\frac{\tilde{E}}{c\tilde{B}} \leq \frac{1}{\beta} + \alpha \ll 1$. Les effets magnétiques dominent nettement les effets électriques.

4.d. Evaluons : $\frac{1}{c^2} \frac{\left| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right|}{\left| \text{div} \vec{A} \right|} \approx \frac{\tilde{V}}{c\tilde{A}} \frac{d}{c\tau} \leq \frac{\tilde{V}}{c\tilde{A}} \frac{L}{c\tau} \approx \frac{\alpha}{\beta} \ll 1$. Donc la jauge de Lorentz devient, dans

l'ARQS magnétique : $\text{div} \vec{A} \approx 0$. On retrouve la jauge de Coulomb de la magnétostatique.

4.e. Calculons le rapport : $\frac{\left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|}{\left| \text{div} \vec{j} \right|} \approx \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{d}{\tau} \leq \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{j}} \frac{L}{\tau} = \frac{\alpha}{\beta} \ll 1$. Dans l'ARQS magnétique, l'équation locale

de conservation de la charge est la même qu'en statique : $\text{div} \vec{j} \approx 0$. Dans ces conditions, on retrouve notamment la loi des nœuds et les lois usuelles de l'électrocinétique, qui relèvent donc de l'ARQS magnétique (la loi des nœuds n'existe pas dans l'ARQS électrique).

5. C'est bien sûr la limite magnétique qui nous est familière, et qui d'ailleurs est souvent assimilée (à tort) à l'ARQS. En pratique, sauf dans des systèmes « pathologiques » (les condensateurs), l'ARQS se confond avec l'ARQS magnétique. La raison en est fort simple : la neutralité des conducteurs. Ce qui fait que les charges (au sens de $\rho \neq 0$) sont en général absentes, alors que circulent des courants. Bref,

le rapport $\beta = \frac{\tilde{j}}{c\tilde{\rho}}$ presque toujours très grand devant 1.

Deuxième partie : propagation guidée dans un câble coaxial

A. Préambule : Propagation d'une onde électromagnétique dans un diélectrique Infini

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \boxed{\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libre}}} \quad \boxed{\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad \boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\
 2. \quad & \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}} ; \quad \boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \text{ en}
 \end{aligned}$$

l'absence de charges et courants libres. Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Thomson sont évidemment inchangées.

$$3. \text{ Les équations de propagation du champ électromagnétique s'écrivent : } \begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta \vec{B} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}$$

Les OPPH ne peuvent s'y propager que si elles vérifient la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r$.

Par conséquent, $k = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$.

$\text{div } \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$: les OPPH sont donc Transverses Electriques.

$\text{div } \vec{B} = -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$: les OPPH sont donc Transverses Magnétiques.

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ se réécrit : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$ en choisissant $k > 0$. Cela implique que \vec{E}

et \vec{B} sont en phase, que $\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}$ et que le trièdre $[\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}]$ est orthogonal direct (tout cela

n'est validé que par le fait que la constante diélectrique ϵ_r est réelle positive.

B. Mode TEM d'un câble coaxial : étude théorique et expérimentale

I. Etude du mode TEM dans le cas d'un câble idéal.

- ◆ Le modèle du conducteur parfait consiste à **faire tendre la conductivité vers l'infini**, ce qui revient à considérer la **profondeur de peau** comme **nulle**. Cela implique que $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{j} = \vec{0}$, $\rho = 0$ en tout point du volume du conducteur. On a également $\vec{B} = \vec{0}$ en tout point du volume, si \vec{B} est variable.

◆ On en déduit que **charges et courants sont localisés à la surface** du milieu conducteur.

◆ Puisque \vec{E} est radial, il est donc **normal** aux conducteurs : il n'a donc pas à s'annuler en $r = a$ ou $r = b$, à cause de la présence de charges surfaciques. De même, \vec{B} étant orthoradial, il est **tangent** aux conducteurs : il n'a donc pas à s'annuler en $r = a$ ou $r = b$, à cause de la présence de courants surfaciques.

Conclusion : **aucune condition aux limites n'est donc imposée aux fonctions $E_0(r, z)$ et $B_0(r, z)$ en $r = a$ ou $r = b$.**

♦ Le fait de supposer les conducteurs parfaits implique que le **champ électromagnétique de l'onde n'y pénètre pas**. Par conséquent, il ne peut être absorbé par les conducteurs par effet Joule. Puisque le champ de l'onde ne subit aucune absorption, son vecteur de Poynting n'est donc pas atténué à mesure que l'onde se propage dans le câble. On en déduit que les amplitudes $E_0(r, z)$ et $B_0(r, z)$ des champs ne subissent pas non plus d'atténuation.

Conclusion : $E_0(r, z)$ et $B_0(r, z)$ sont en fait indépendants de z .

2. ♦ L'expression donnée pour \vec{E} et \vec{B} montrent qu'ils se propagent selon la direction \vec{u}_z . Or \vec{E} est radial et \vec{B} est orthoradial. Ils sont donc tous deux perpendiculaires à la direction de propagation. D'où l'appellation « Transverse électrique et magnétique (TEM) ».

♦ L'équation de Maxwell-Faraday nous fournit sans difficulté la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$$

ATTENTION ! On trouve bien **a posteriori** la relation de structure d'une OPP, **mais l'onde considérée n'est PAS PLANE** (les champs ne sont pas constants dans un plan d'onde). Il était donc hors de question ici d'invoquer le résultat de la question A.3.). En résumé, les deux

propositions suivantes : « l'onde est plane progressive » et « $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ » ne sont donc pas équivalentes : la première implique la seconde, mais la réciproque est manifestement fautive...

3. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit, dans le diélectrique : $\text{div} \vec{E} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r)$. On en

déduit que $rE_0(r) = \text{constante} = aE_0(a)$ d'où le résultat : $E_0(r) = E_a \frac{a}{r}$.

La relation de structure implique : $B_0(r) = \frac{\sqrt{\epsilon_r} E_a a}{c r}$.

4. On a immédiatement : $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$, ce qui montre l'**absence de dispersion** puisque la **constante diélectrique** du milieu est supposée **indépendante de la fréquence**.

5. Le vecteur de Poynting vaut : $\vec{\Pi}(r, z, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} E_a^2 a^2}{\mu_0 c r^2} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$. La densité

d'énergie vaut : $u_{em}(r, z, t) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 \epsilon_r E_a^2 \frac{a^2}{r^2} \cos^2(\omega t - kz)$. L'énergie se propage

donc à la vitesse : $v_E = \frac{\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle}{\langle u_{em} \rangle} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$ (en faisant un bilan de l'énergie moyenne traversant

une section droite S pendant un temps dt , on écrit $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle S dt = \langle u_{em} \rangle S v_E dt$).

6. La puissance moyenne se propageant le long du câble est donnée par :

$\langle P \rangle = \int_a^b \langle \vec{\Pi}(r, z, t) \rangle \cdot \vec{u}_z \cdot 2\pi r dr$, ce qui donne : $\langle P \rangle = \pi \ln\left(\frac{b}{a}\right) \epsilon_0 c \sqrt{\epsilon_r} E_a^2 a^2$.

II. Grandeurs électrocinétiques caractéristiques du câble idéal dans le mode TEM.

1. On applique le théorème d'Ampère le long d'un cercle d'axe Oz et de rayon r compris entre a

et b : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I^{\text{int}} + \epsilon_0 \epsilon_r \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \right) = \mu_0 I^{\text{int}}$, ce qui donne : $2\pi r \underline{B}(r, z, t) = \mu_0 \underline{I}(z, t)$

soit : $\underline{I}(z, t) = \frac{2\pi a \sqrt{\epsilon_r} E_a}{\mu_0 c} \exp i(\omega t - kz)$.

En appliquant de nouveau le théorème d'Ampère le long d'un cercle d'axe Oz et de rayon supérieur à b, on obtient, vu que \vec{B} est nul à l'extérieur :

$\underline{I}_{\text{gain}}(z, t) = -\underline{I}(z, t) = -\frac{2\pi a \sqrt{\epsilon_r} E_a}{\mu_0 c} \exp i(\omega t - kz)$. Les deux courants se propagent dans le

même sens, mais sont en opposition de phase.

2. $\underline{U}(z, t) = - \int_{\text{gain}}^{\text{ampe}} \vec{E}(r, z, t) \cdot d\vec{l} = -E_a \exp i(\omega t - kz) \int_b^a \frac{dr}{r}$, soit : $\underline{U}(z, t) = a \ln\left(\frac{b}{a}\right) E_a \exp i(\omega t - kz)$. Il

est bien évident que $\underline{U}(z, t)$ est indépendante du chemin d'intégration. Pour autant, $\vec{\text{rot}} \vec{E} \neq \vec{0}$ (cf. relation de structure par exemple). Par conséquent, il serait faux d'écrire : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$.

3. $Z_C = \frac{\underline{U}(z, t)}{\underline{I}(z, t)} = \mu_0 c \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi \sqrt{\epsilon_r}}$. Ce rapport est constant, réel et positif, ce qui signifie que les ondes de

tension et de courant sont en phase. Numériquement : $Z_C = 49,2 \Omega$.

Il s'agit de l'impédance caractéristique du câble. Cette notion fait référence à des ondes progressives.

On rencontre cette même notion en acoustique ($Z_{OPP} = \frac{P_1}{v_1} = \rho_0 c_s$), pour les ondes sur une corde

($Z_{OPP} = \frac{T_{\perp}}{v_{\perp}} = \sqrt{\mu T}$).

4. Le rapport $\frac{|E|}{v_{\phi} |B|}$ vaut $\frac{|E|}{v_{\phi} |B|} = 1$. Il n'est ni grand ni petit devant 1, ce qui signifie que l'on ne peut négliger ni la densité d'énergie électrique ni la densité d'énergie magnétique. Par conséquent, la notion de « limite électrique » et de « limite magnétique » est ici non pertinente.

5. Par définition, $dU_{\text{mag}}(z, t) = \iiint_{\text{tranche de diélectrique } [z, z+dz]} \frac{B^2(r, z, t)}{2\mu_0} d\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E_a^2}{2} \cos^2(\omega t - kz) dz \int_a^b \frac{a^2}{r^2} 2\pi r dr$

soit : $dU_{\text{mag}}(z, t) = \pi \epsilon_0 \epsilon_r E_a^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) dz$ qu'on peut récrire :

$dU_{\text{mag}}(z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) dz I^2(z, t)$ où $I(z, t) = \Re e(\underline{I}(z, t))$.

On en déduit l'inductance linéique du câble définie par : $dU_{\text{mag}}(z, t) = \frac{1}{2} \Lambda dz I^2(z, t)$. Donc :

$\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. AN : $\Lambda = 0,25 \mu\text{H.m}^{-1}$.

6. Par définition,

$$dU_{elec}(z,t) = \iiint_{\substack{\text{tranche} \\ \text{de diélectrique} \\ [z, z+dz]}} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2(r,z,t)}{2} d\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E_a^2}{2} \cos^2(\omega t - kz) dz \int_a^b \frac{a^2}{r^2} 2\pi r dr \quad \text{soit :}$$

$$dU_{elec}(z,t) = \pi \epsilon_0 \epsilon_r E_a^2 a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) dz \quad \text{qu'on peut récrire :}$$

$$\boxed{dU_{elec}(z,t) = \pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U^2(z,t)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} dz} \quad \text{où } U(z,t) = \Re(\underline{U}(z,t)).$$

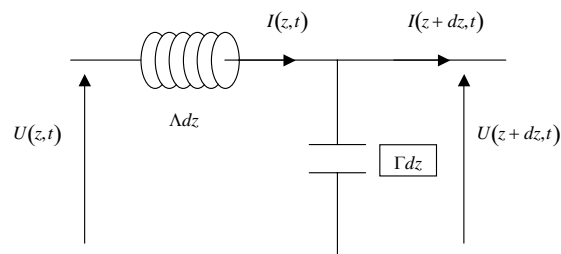
On en déduit la capacité linéique du câble définie par : $dU_{elec}(z,t) = \frac{1}{2} \Gamma dz U^2(z,t)$. Donc :

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}. \quad \text{AN : } \Gamma = 0,10 \text{ nF.m}^{-1}.$$

$$7. Z_C = \frac{U(z,t)}{\underline{I}(z,t)} = \mu_0 c \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi \sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{qu'on peut récrire sous la forme : } \boxed{Z_C = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}.$$

III. Modèle électrocinétique à constantes réparties et aspects expérimentaux.

1. On peut proposer le modèle suivant, les inductances étant montées « en série » et les capacités « en parallèle » :



2. La tranche étant assez petite pour être traitée dans l'ARQS, les lois de Kirchhoff s'appliquent.

La loi des nœuds donne : $\frac{\partial}{\partial z} = -\Gamma \frac{\partial U}{\partial t}$. La loi des mailles donne : $\frac{\partial U}{\partial z} = -\Lambda \frac{\partial I}{\partial t}$. On en les

équations de propagation :
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$
 On identifie la vitesse de propagation des

ondes de tension et de courant dans ces équations : $v = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$. On retrouve la vitesse

de phase des ondes électromagnétiques étudiées plus haut, ce qui est la moindre des choses, étant donné que les deux approches décrivent le même phénomène. AN : $v = 2,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

3. Propagation d'une impulsion de tension le long du câble

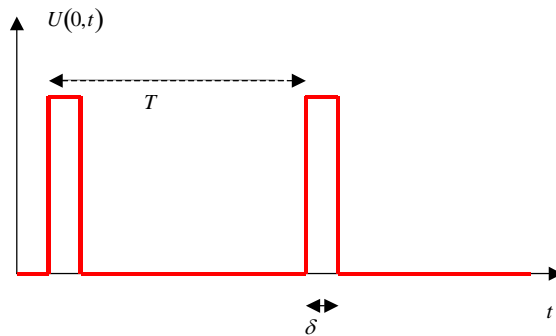
- a. L'onde incidente est caractérisée par : $\frac{U_{inc}(z,t)}{I_{inc}(z,t)} = Z_C$, l'onde réfléchiée par :

$$\frac{U_{réf}(z,t)}{I_{réf}(z,t)} = -Z_C. \text{ Par conséquent } \begin{cases} U(z,t) = U_{inc}(z,t) + U_{réf}(z,t) \\ I(z,t) = \frac{U_{inc}(z,t) - U_{réf}(z,t)}{Z_C} \end{cases}$$

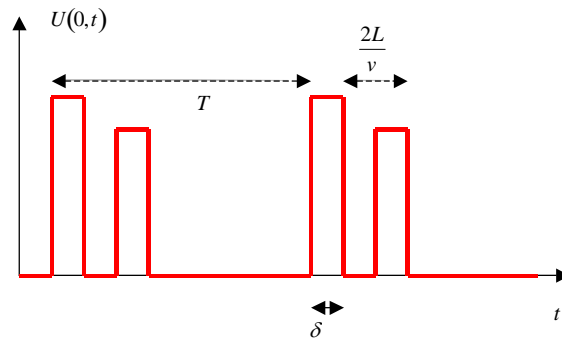
La condition aux limites s'écrit : $\frac{U(L,t)}{I(L,t)} = R_C$. On en déduit le coefficient de

réflexion : $\rho = \frac{U_{réf}(L,t)}{U_{inc}(L,t)} = \frac{R_C - Z_C}{R_C + Z_C}$.

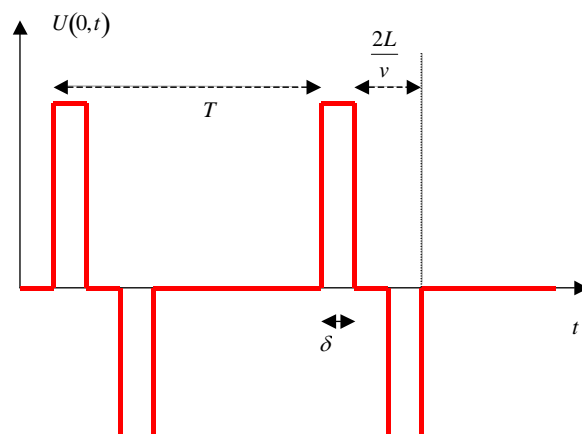
- b. L'impédance du générateur est « adaptée » à celle du câble : il ne se produit donc aucune réflexion en tête de ligne (ie sur le générateur). On n'a donc à tenir compte d'un seul phénomène de réflexion (en bout de ligne) et non de deux.
- c. (i) $\rho = 0$: pas de réflexion.



(ii) Circuit ouvert : $\rho = 1$ (on a tenu compte ici de l'atténuation qui accompagne la propagation (cf. partie IV))



(iii) Court-circuit : $\rho = -1$ (en tenant compte là aussi de l'atténuation)



d. $v = \frac{2L}{\Delta t}$ ce qui donne : $v = 1,95 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$: c'est en bon accord avec le résultat théorique.

4. Ondes stationnaires sinusoïdales

a. Circuit ouvert

◆ Ecrivons l'onde de tension incidente sous la forme : $\underline{U}_{inc}(z,t) = V_0 \exp i(\omega t - kz)$.
L'onde de tension réfléchie s'écrit alors : $\underline{U}_{ref}(z,t) = B \exp i(\omega t + kz)$. Le coefficient de réflexion valant 1 en $x = L$, on en déduit : $B \exp(ikL) = V_0 \exp(-ikL)$. D'où l'expression de l'onde de tension globale :

$$\underline{U}(z,t) = V_0 \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) + \exp(ik(z-2L))] = V_0 \exp i(\omega t - kL) [\exp(ik(L-z)) + \exp(ik(z-L))]$$

$$\text{On en déduit : } \underline{U}(z,t) = 2V_0 \cos(\omega t - kL) \cos(k(z-L)).$$

◆ Pour l'onde de courant, on écrit en complexes :

$$\underline{I}(z,t) = \frac{V_0}{Z_c} \exp i(\omega t - kL) [\exp(ik(L-z)) - \exp(ik(z-L))], \text{ ce qui donne :}$$

$$\underline{I}(z,t) = 2 \frac{V_0}{Z_c} \sin(\omega t - kL) \sin(k(z-L)).$$

◆ On aura un ventre de tension en $z = 0$ si $|\cos(kL)| = 1$ soit $k = n \frac{\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}^*$. En termes de fréquences, on a donc un maximum de tension en $z = 0$ pour les fréquences

$$f_n = n \frac{v}{2L} = n \frac{c}{2L\sqrt{\epsilon_r}}. \text{ Les valeurs correspondantes sont les suivantes :}$$

n	1	2	3	4	5	6	7
f_n (MHz)	0,98	1,95	2,93	3,90	4,88	5,85	6,83
Fréquences exp. f (MHz)	0,94	1,93	2,88	3,92	4,82	5,84	6,82

L'accord théorie-expérience est globalement bon. On pourrait exploiter ces mesures en effectuant une régression linéaire des fréquences f_n en fonction de l'entier n , pour en tirer une mesure de la vitesse de propagation v . (cf.c)

b. Court-circuit.

♦ On procède comme ci-dessus en écrivant que le coefficient de réflexion pour la tension en $x = L$ vaut -1 . Et on obtient les résultats suivants :

$$U(z,t) = 2V_0 \sin(\omega t - kL) \sin(k(z-L)) \quad \text{et} \quad I(z,t) = 2 \frac{V_0}{Z_c} \cos(\omega t - kL) \cos(k(z-L)).$$

♦ On aura un ventre de tension en $z = 0$ si $\cos(kL) = 0$ soit

$k = (2n+1) \frac{\pi}{2L}$, $n \in \mathbb{N}$. En termes de fréquences, on a donc un maximum de

tension en $z = 0$ pour les fréquences $f_{n+1/2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{v}{2L} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L\sqrt{\epsilon_r}}$. Les

valeurs correspondantes sont les suivantes :

$n + 1/2$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
$f_{n+1/2}$ (MHz)	0,49	1,46	2,44	3,41	4,39	5,36	6,34
Fréquences exp. f(MHz)	0,55	1,44	2,44	3,58	4,36	5,53	6,30

L'accord théorie-expérience est globalement bon.

c. L'idée est de tracer f_n en fonction de n , et aussi d'intercaler les points

$\left(f_{n+1/2}, n + \frac{1}{2}\right)$: on obtient une droite de pente $\frac{v}{2L}$. Le tableau de valeurs est le

suivant :

n	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
Fréquences (MHz)	0,55	0,94	1,44	1,93	2,44	2,88	3,58	3,92	4,36	4,82	5,53	5,84	6,30	6,82

La régression linéaire donne : $\frac{v}{2L} \approx 9,76 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ (coefficient de corrélation 0,999) soit

une vitesse de propagation : $v \approx 1,95 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. L'accord est excellent entre les deux mesures.

IV. Pertes dues aux conducteurs

1. Effet de peau dans les métaux

Quand une onde électromagnétique arrive sur un métal, se produit d'une part le phénomène de **réflexion**, et d'autre part une **transmission** de l'onde dans le conducteur, qui se traduit par une **absorption** de l'énergie du champ par effet Joule. Le champ transmis **décroît exponentiellement** à partir de la surface du conducteur. Ceci n'est vrai qu'à **basse fréquence** (domaine hertzien, IR et visible). Dans le domaine des **UV**, les métaux deviennent **transparents**.

L'**effet de peau** correspond à la pénétration du champ sur une épaisseur très faible, ce qui se traduit par une **localisation des courants au voisinage de la surface** du conducteur. La profondeur de peau δ décroît avec la conductivité σ et avec la pulsation ω de l'onde.

2. Distribution du courant dans un fil conducteur cylindrique

a. On peut se placer dans l'ARQS magnétique : $\left\| \sigma \vec{E} \right\| \gg \epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$ ce qui est acceptable pour

des fréquences vérifiant : $f \ll \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}$. AN : $f \ll 10^{18} \text{ Hz}$. A ces fréquences, on a dépassé le

domaine de validité de la loi d'Ohm, et on peut se poser des questions sur la pertinence d'une

description continue de la matière. Conclusion : l'ARQS magnétique est toujours vérifiée dans les bons conducteurs comme le cuivre.

b. Le champ électrique est régi par l'équation de diffusion $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{E}$, conséquence

directe des équations de Maxwell dans l'ARQS magnétique ($\text{div} \vec{E} = 0$ (métal neutre localement), $\text{div} \vec{B} = 0$, $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E}$). Vu la géométrie du champ et vu qu'on est en régime forcé sinusoïdal ($\vec{E}(r,t) = E(r) \exp(i\omega t) \vec{u}_z$), on en déduit que

$$\Delta E(r) = i\omega\mu_0\sigma E(r), \text{ ce qui se récrit, d'après le formulaire : } \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} = i\omega\mu_0\sigma E(r).$$

c. ♦ $\frac{\left| \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right|}{\left| \frac{d^2 E}{dr^2} \right|} \approx \frac{\frac{\tilde{E}}{a\delta}}{\frac{\tilde{E}}{\delta^2}} = \frac{\delta}{a} \ll 1$. On en déduit que l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{d^2 E}{dr^2} \approx i\omega\mu_0\sigma E(r).$$

♦ Le polynôme caractéristique de cette équation est : $p^2 = i\omega\mu_0\sigma$ de racines

$$p = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0\sigma} = \pm \frac{1+i}{\delta}, \text{ en posant : } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}. \text{ La solution générale de cette}$$

$$\text{équation différentielle s'écrit donc : } E(r) = A \exp\left((1+i)\frac{r}{\delta}\right) + B \exp\left(-(1+i)\frac{r}{\delta}\right)$$

qu'on peut récrire plus commodément sous la forme :

$$E(r) = A' \exp\left((1+i)\frac{r-a}{\delta}\right) + B' \exp\left(-(1+i)\frac{r-a}{\delta}\right). \text{ Or l'effet de peau étant très}$$

marqué ($\delta \ll a$), on a aussi, pour les r « faibles » (proches de zéro) : $\delta \ll a - r$, ce qui conduirait à une divergence du champ électrique sur l'axe du fil. Par conséquent, on doit poser pour éviter ce désagrément : $B' = 0$.

$$\text{Conclusion provisoire : } \underline{E}(r,t) = A' \exp\left((1+i)\frac{r-a}{\delta}\right) \exp(i\omega t)$$

♦ Il reste à exprimer la constante en fonction des données pour conclure. Exprimons l'intensité du courant complexe parcourant le fil : $\underline{I}(t) = I_0 \exp(i\omega t) = \iint_{\text{section}} \sigma \vec{E}(r,t) \cdot \vec{u}_z dS$

soit : $I_0 = \sigma A' \exp\left(-(1+i)\frac{a}{\delta}\right) \int_0^a \exp\left((1+i)\frac{r}{\delta}\right) 2\pi r dr$. L'intégrale se calcule par parties, ce qui

donne :

$$\int_0^a \exp\left((1+i)\frac{r}{\delta}\right) r dr = \frac{\delta a}{1+i} \exp\left((1+i)\frac{a}{\delta}\right) - \frac{\delta^2}{(1+i)^2} \exp\left((1+i)\frac{a}{\delta}\right) \approx \frac{\delta a}{1+i} \exp\left((1+i)\frac{a}{\delta}\right) \text{ car}$$

$$\delta \ll a. \text{ Finalement : } I_0 = \frac{2\pi\sigma\delta a}{1+i} A'.$$

$$\text{Conclusion finale : } \underline{E}(r,t) = \frac{(1+i)I_0}{2\pi\sigma a\delta} \exp\left(-\frac{a-r}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{a-r}{\delta}\right)\right).$$

d. Numériquement, on trouve (à 10 MHz) : $\delta \approx 21 \mu\text{m}$. Si on prend $a = 0,43 \text{ mm}$ (rayon de l'âme), on trouve : $\frac{a}{\delta} \approx 20$: l'approximation est bien vérifiée.

e. $\langle dP \rangle = \iiint_{portion} \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle d\tau = \sigma dz \int_0^a \frac{1}{2} |E(r,t)|^2 2\pi r dr$ soit :

$$\langle dP \rangle = \pi \sigma dz \frac{I_0^2}{2\pi^2 a^2 \delta^2 \sigma^2} \exp\left(-2\frac{a}{\delta}\right) \int_0^a \exp\left(2\frac{r}{\delta}\right) r dr.$$

Une nouvelle intégration par parties donne :

$$\int_0^a \exp\left(2\frac{r}{\delta}\right) r dr = \left(\frac{a\delta}{2} - \frac{\delta^2}{4}\right) \exp\left(\frac{2a}{\delta}\right) \approx \frac{a\delta}{2} \exp\left(\frac{2a}{\delta}\right) \text{ car } \delta \ll a.$$

Conclusion : $\langle dP \rangle = \frac{dz}{\sigma 4\pi a \delta} I_0^2$. Or $\langle dP \rangle = \frac{1}{2} dR I_0^2 = \frac{1}{2} \rho_0 dz I_0^2$, d'où l'expression

de la résistance linéique du fil : $\rho_0 = \frac{1}{\sigma 2\pi a \delta}$.

◆ Ce résultat traduit le fait que tout se passe comme si le courant était uniformément réparti dans une couronne d'épaisseur δ (avec $\delta \ll a$) située au voisinage de la surface du conducteur.

◆ Puisque $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, $\rho_0 \propto \sqrt{\omega}$: la résistance augmente avec la fréquence car la section « utile » du fil décroît avec la fréquence.

3. Bilan énergétique sur une portion de câble coaxial

a. L'amplitude maximale du champ le long du conducteur vaut : $|E_z|_{\max} = \frac{I_0}{\sigma \pi a \delta}$.

L'amplitude maximale du champ dans le diélectrique vaut (cf. II.1) :

$$|E_r|_{\max} = \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi a \sqrt{\epsilon_r}}.$$

Par conséquent : $\frac{|E_z|_{\max}}{|E_r|_{\max}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{\mu_0 c \sigma \delta} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} \delta$ soit : $\frac{|E_z|_{\max}}{|E_r|_{\max}} = k\delta = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \approx 6,7 \cdot 10^{-5}$!!!

C'est ridicule : on peut en conclure que les pertes seront (très) modérées dans le câble à cette fréquence (10 MHz).

b. On peut utiliser le calcul effectué à la question IV.2.e et transposer le résultat :

$$\langle dP_{\hat{ame}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{dz}{\sigma 2\pi a \delta} I_0^2(z).$$

De même pour la gaine, on aurait :

$$\langle dP_{gaine} \rangle = \frac{1}{2} \frac{dz}{\sigma 2\pi b \delta} I_0^2(z)$$

puisque le courant parcourant la gaine a la même amplitude.

Conclusion : $\langle dP_J \rangle = \langle dP_{\hat{ame}} \rangle + \langle dP_{gaine} \rangle = \frac{1}{2} \frac{dz}{\sigma 2\pi \delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) I_0^2(z)$. La résistance par

unité de longueur vaut donc : $\rho = \frac{1}{\sigma 2\pi \delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

c. ◆ Le bilan énergétique sur la tranche de câble s'écrit :

$$\frac{dU_{\hat{em}}}{dt} = \iint_{section\ z} \vec{\Pi}(r,z,t) \cdot \vec{u}_z dS - \iint_{section\ z+dz} \vec{\Pi}(r,z+dz,t) \cdot \vec{u}_z dS - dP_J.$$

Si on moyenne sur le

temps, $\left\langle \frac{dU_{\hat{em}}}{dt} \right\rangle = 0$ car $U_{\hat{em}}$, énergie du champ contenu dans la tranche, est une fonction périodique du temps.

Conclusion : le bilan se limite à $d \left\langle \iint_{\text{section}} \Pi dS \right\rangle = - \langle dP_J \rangle$. Or, on sait (cf. I.6) que :

$$\left\langle \iint_{\text{section}} \Pi dS \right\rangle = \pi \ln \left(\frac{b}{a} \right) \varepsilon_0 c \sqrt{\varepsilon_r} E_a^2 a^2 \quad \text{avec} \quad E_a = \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi a \sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Donc : $\left\langle \iint_{\text{section}} \Pi dS \right\rangle = \frac{\mu_0 c}{4\pi \sqrt{\varepsilon_r}} \ln \left(\frac{b}{a} \right) I_0^2(z).$

Par conséquent : $\frac{dI_0}{dz} + \frac{1}{\ell} I_0(z) = 0$ où : $\ell = \frac{2\sigma\delta}{\varepsilon_0 c \sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

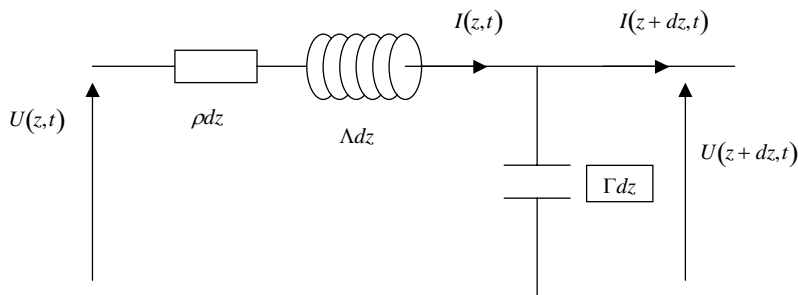
◆ ℓ est la distance caractéristique d'atténuation de l'onde de courant, c'est-à-dire du champ électromagnétique le long du câble. Comme $\delta, \ell \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$: l'atténuation est donc d'autant plus sensible que la fréquence est plus élevée.

◆ Le rapport $\frac{b}{a}$ qui maximise ℓ est celui qui maximise la fonction : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x}$, ce qui revient à trouver la solution de l'équation : $x \ln x = 1+x$. La solution est $x \approx 3,59$. Les valeurs numériques données correspondent à un rapport $\frac{b}{a} \approx 3,42$. Ce n'est pas si loin...

◆ à 1 MHz, $\ell \approx 800$ m. A 100 MHz, $\ell \approx 80$ m.

4. Modèle électrocinétique avec pertes.

a. Le schéma électrocinétique équivalent est le suivant (résistance ρdz en série) :



Les équations de couplage (lois des nœuds et des mailles) sont maintenant : $\frac{\partial I}{\partial z} = -\Gamma \frac{\partial U}{\partial t}$ et

$\frac{\partial U}{\partial z} = -\Lambda \frac{\partial I}{\partial t} - \rho I(z, t)$. On en déduit comme précédemment l'équation aux dérivées partielles

régissant les ondes de courant et de tension : $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial t} \end{array} \right.$ où $D = \frac{1}{\rho\Gamma}$ est un

« coefficient de diffusion » (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

b. La relation de dispersion des OPPH s'écrit dès lors : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{i\omega}{D}$, ce qu'on peut mettre sous la forme : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{iv^2}{\omega D} \right)$ soit : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{i\rho}{\Lambda\omega} \right)$.

Le rapport $\frac{\rho}{\Lambda\omega}$ vaut d'après ce qui précède : $\frac{\rho}{\Lambda\omega} = \frac{\delta}{2} \left(\frac{1 + \frac{1}{b}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right)$.

A 1 MHz, $\frac{\rho}{\Lambda\omega} \approx 8,1\%$; à 10 MHz, $\frac{\rho}{\Lambda\omega} \approx 2,6\%$; à 100 MHz, $\frac{\rho}{\Lambda\omega} \approx 0,8\%$.

c. ♦ Vu les valeurs assez faibles prises par $\frac{\rho}{\Lambda\omega}$, on est tenté d'approcher le vecteur d'onde

complexe par un développement en série : $\underline{k} = \pm \frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{i\rho}{\Lambda\omega} + \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2 + \dots \right)$

♦ On s'intéresse ici à l'aspect propagatif éventuellement dispersif, ie à la partie réelle du vecteur d'onde qui vaut : $k' = \pm \frac{\omega}{v} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2 + \dots \right)$. On constate que le comportement dispersif

n'apparaît qu'à l'ordre 2 en $\frac{\rho}{\Lambda\omega}$.

♦ La vitesse de phase vaut : $v_\phi = \pm \frac{v}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2} \approx \pm v \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2 \right)$.

La vitesse de groupe s'obtient en différentiant la relation de dispersion liant k' et ω , ce qui

donne : $dk' = \pm \left[\frac{d\omega}{v} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2 \right) - \frac{d\omega}{4v} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2 \right] = \pm \frac{d\omega}{v} \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2 \right)$ soit :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \pm \frac{v}{1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2} \approx \pm v \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega} \right)^2 \right)$$

♦ Le terme correctif par rapport au cas non dispersif vaut 0,08% à 1 MHz : la dispersion est extrêmement peu sensible dans le câble. On peut donc négliger la dispersion sans problème.

d. ♦ Pour ce qui est de l'atténuation due ici à l'absorption, il faut se pencher sur la partie

imaginaire du vecteur d'onde : $k'' = \mp \frac{1}{2} \frac{\rho}{\Lambda v} = \mp \frac{1}{2} \rho \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} = \mp \frac{\rho}{2Z_C}$. Celle-ci est présente dès

l'ordre 1 du développement. Par conséquent, la conséquence la plus importante, et de loin, du caractère non parfait des conducteurs, est l'atténuation du signal, la dispersion étant tout à fait négligeable.

♦ L'amplitude des ondes de tension et courant sera dès lors affectée d'un facteur exponentiel $\exp(k''z)$ si l'onde se propage vers les z croissants (ie si on a choisi $k' > 0$). Ce facteur traduisant l'atténuation $k'' < 0$. Calculons la distance caractéristique de l'atténuation du signal :

$l = -\frac{1}{k''} = \frac{2Z_C}{\rho}$. On peut récrire cette distance à l'aide des résultats précédents, ce qui donne :

$$l = \ell = \frac{2\sigma\delta}{\epsilon_0 c \sqrt{\epsilon_r}} \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} . \text{ L'analyse électrocinétique est en cohérence avec l'analyse électromagnétique.}$$

e. Le plus simple et le plus astucieux consiste à tracer $\ln\left(\frac{L}{\ell}\right) = \ln(-\ln \alpha)$ en fonction de $\ln \omega$. Vu que $\ell \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, on est censé trouver une droite de pente $\frac{1}{2}$.

Numériquement, le tableau de valeurs est le suivant :

$f(\text{MHz})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln f$	13,8	14,5	14,9	15,2	15,4	15,6	15,8	15,9	16,0	16,1
α	0,81	0,75	0,70	0,66	0,63	0,61	0,58	0,56	0,54	0,52
$\ln(-\ln \alpha)$	- 1,557	- 1,246	- 1,031	- 0,878	- 0,772	- 0,705	- 0,607	- 0,545	- 0,484	- 0,425

La régression linéaire donne une pente de 0,490 (coefficient de corrélation : 0,999). C'est convenable...