Les équations de Maxwell sont-elles incomplètes ?

GERMAIN ROUSSEAUX
L.P.M.M.H., E.S.P.C.I.
10 rue Vauquelin
75231 Paris Cedex 05

RESUME. Deux chercheurs ont récemment et indépendamment proposé de modifier les équations de Maxwell qui régissent l'électromagnétisme. Les deux démarches bien que différentes en pratique partagent quelques points communs qu'il est ici question de souligner. En particulier, leur conclusion majeure est que les équations de Maxwell doivent être complétées par des termes « hydrodynamiques » qui rendraient compte de phénomènes dissipatifs.

ABSTRACT. Two researchers have recently and independently proposed to modify the Maxwell equations which rule electromagnetism. Their respective approaches although different in practical share some common features that we would like to underline here. In particular, their major conclusion is that the Maxwell equations must be completed by « hydrodynamic » terms, which would stand for dissipative phenomena.

…when I die and go to Heaven, there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am really optimistic.

Sir Horace Lamb, 1932.

1 Introduction

James Clerk Maxwell a proposé les équations qui portent maintenant son nom il y a plus d'un siècle et tout (ou presque [1]) a été dit sur les équations de l'électromagnétisme. Cependant, à la différence d'autres équations de la physique comme celles de la mécanique des fluides, des termes qui rendraient compte de phénomènes dissipatifs n'apparaissent pas explicitement dans la structure des équations de Maxwell « macroscopiques » alors qu'on identifie clairement le terme de diffusion visqueuse dans les équations de Navier-Stokes. Pour palier à ce manque, il a été postulé une relation linéaire [2] entre le champ de déplacement électrique **D** (magnétique **H**) et le champ électrique **E** (d'induction **B**) :

$$\mathbf{D} = \varepsilon.\mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mu.\mathbf{H}$$

où ε et μ sont respectivement la permittivité et la perméabilité du milieu étudié. Ces deux paramètres « physiques » sont des nombres complexes et leur partie imaginaire est considérée comme une mesure du caractère dissipatif du milieu. Le premier but de cet article est de tenter de répondre à la question suivante : n'est-il pas possible d'introduire explicitement des termes « visqueux » dans les équations de Maxwell ?

Dans un premier temps, on rappellera les deux approches qui vont dans le sens d'une modification. Ensuite, on discutera leurs conséquences ainsi que leurs champs d'application. Puis, il sera question d'un rapide bilan des expériences proposées pour prouver expérimentalement l'existence de nouveaux termes. Le deuxième but de cet article est de susciter des expériences en laboratoires chez les différentes communautés de physiciens susceptibles d'observer des phénomènes dissipatifs dans leur domaine d'études respectif.

2 A propos d'une analogie entre l'électromagnétisme et la mécanique des fluides

Il est remarquable que Maxwell, dès l'origine de l'électromagnétisme, ait puisé dans les concepts et les outils de la mécanique des fluides pour pouvoir déduire la formulation mathématique et l'interprétation physique de ses équations. D'autres physiciens comme Lamb, Batchelor ou plus récemment H.K. Moffatt [3] ont développé des analogies qui se sont révélées prolifiques et qui ont surtout permis d'appréhender certains problèmes hydrodynamiques avec une vision électromagnétique et vice et versa…

Haralambos Marmanis a proposé une nouvelle théorie [4] de la turbulence incompressible en mécanique des fluides basée sur une analogie de forme entre d'une part, quatre équations issues de l'équation de continuité et des équations de Navier-Stokes et d'autre part, les quatre équations de Maxwell.

Les équations « hydrodynamiques » s'expriment en fonction du vecteur de vorticité $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$ et du vecteur de Lamb $\mathbf{l} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$:

$$\nabla.\mathbf{w} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{w} = -\nabla \times \mathbf{l} - \nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{w}$$

$$\nabla . \mathbf{l} = -\nabla^2 (\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}) = n$$

$$\partial_t \mathbf{l} = \mathbf{u}^2 \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{j} + \nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{l}$$

$$\mathbf{j} = n.\mathbf{u} + \nabla \times [h.\mathbf{u}] + \mathbf{w} \times \nabla [\frac{p}{\rho} + \frac{3}{2}\mathbf{u}^2] + \mathbf{2(l.\nabla)u}$$

où n, **j**, **u,** h=**u.w** et ν sont respectivement la « densité de charges » hydrodynamiques, le « vecteur courant » hydrodynamique, la vitesse, la densité d'hélicité et la viscosité cinématique. Formellement, les équations hydrodynamiques se présentent comme deux couples d'équations où l'on distingue un couple d'équations non-temporelles et un couple d'équations temporelles.

Comparons les équations de la mécanique des fluides aux équations de Maxwell exprimées dans le système d'unités internationales [2] :

$$\nabla . \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\nabla . \mathbf{D} = \rho$$

$$\partial_t \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{I}$$

où ρ et **I** sont la densité de charges électriques et le vecteur courant de charges électriques.

Existe-t-il une analogie entre ces équations et celles de l'hydrodynamique ?

Oui, mais il n'y a pas de termes dissipatifs en double rotationnel des champs. Néanmoins, on peut proposer la modification suivante des équations de Maxwell :

$$\nabla.\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} - \beta \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho$$

$$\partial_t \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{I} - \alpha \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$$

Marmanis a, en fait, écrit pour les deux équations de Maxwell temporelles :

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} - \beta \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\partial_t \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{I} - \alpha \nabla \times \nabla \times \mathbf{D}$$

Cependant, cette formulation ne coïncide pas avec la théorie de Liu (voir plus loin)...

Marmanis [5] a postulé $\alpha=\beta=h/2\pi$ par unité de masse d' « éther » où h est la constante de Planck car α et β ont la dimension d'une viscosité. Ensuite, à partir des équations de Maxwell modifiées, il a déterminé les équations de propagation des ondes électromagnétiques tenant compte des termes dissipatifs. Puis, il a trouvé l'équation de dispersion des ondes qui comportent deux termes. La comparaison des deux termes permet de trouver deux équations de dispersion approchées. Réciproquement, les équations d'ondes obtenues à partir de ces équations de dispersion sont d'une part l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique et d'autre part l'équation de Dirac de la mécanique quantique relativiste ! Il n'est pas question dans cet article de discuter cette tentative d'« unification » de la physique d'autant plus qu'une autre interprétation a été proposée.

Bien que l'analogie soit très intéressante, elle n'est pas parfaite. En effet, la différence majeure entre les deux jeux d'équations est que les équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Lorentz alors que les équations de l'hydrodynamique sont invariantes par transformations de Galilée. En outre, la mécanique des fluides doit être considérée via l'analogie comme une théorie électromagnétique où le champ « électrique » (**l**) et le champ « magnétique » (**w**) s'expriment directement l'un en fonction de l'autre ($\mathbf{l} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$). C'est pourquoi, des objets hydrodynamiques comme les filaments de vorticité peuvent être considérés comme des objets électromagnétiques duaux c'est à dire des tubes de flux magnétique porteurs de charges électriques interagissant entre eux. Le concept de particule chargée a aussi été utilisé dans le contexte du transport turbulent d'un traceur passif par S. Shridar [6] qui a défini des champs électromagnétiques équivalent à ceux de H. Marmanis. De plus, le caractère incompressible de l'écoulement se traduit par la relation $\nabla.\mathbf{u} = \mathbf{0}$ qui est le pendant du choix de jauge de Coulomb exprimé par $\nabla.\mathbf{A} = \mathbf{0}$ où **A** est le potentiel vecteur. Ainsi, ce dernier, souvent considéré à tort comme un artifice mathématique ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$), s'interprète comme une quantité de mouvement généralisée par unité de charge [7]. Notons enfin que la définition de la densité d'hélicité en mécanique des fluides (h=**u.w**) résonne avec celle de la densité d'hélicité magnétique (h_m=**A.B**) grâce à l'analogie.

3 La théorie hydrodynamique des champs électromagnétiques dans les milieux continus

Mario Liu a proposé également une modification des équations de Maxwell et ceci indépendamment d'Haralambos Marmanis. Le point de départ est la thermodynamique. La démonstration originelle repose sur le principe de maximisation de l'entropie [8]. Plus récemment, cet auteur a aussi usé d'une analogie avec l'hydrodynamique [9].

L'équation de la mécanique des fluides s'écrit en l'absence de forces :

$$\partial_t \rho v_i = -\nabla_j \Pi_{ij}$$

Le tenseur de cisaillement Πij est le flux correspondant à la densité de quantité de mouvement ρvi. Celui-ci se décompose en deux parties (réactive et dissipative) :

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \pi_{ij}^D$$

La partie réactive s'exprime en fonction d'une dérivée thermodynamique (la pression à l'équilibre) tandis que la partie dissipative s'exprime en fonction des dérivées spatiales de la vitesse :

$$\pi_{ij}^D \propto v_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$$

Le raisonnement thermodynamique est le suivant :

Première partie :

à l'équilibre thermodynamique, on a $v_{ij} = 0$: cette « équation » (condition en fait) est non-temporelle.

hors de l'équilibre, $v_{ij} \neq 0$: il existe un courant ~ v_{ij} qui redistribue la densité ρvi.

Deuxième partie :

- les équations de Maxwell (indice M) pour un milieu neutre ou diélectrique s'écrivent :

$$\nabla.\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla.\mathbf{D} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}^{\mathrm{M}}$$

$$\partial_t \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H}^{\mathrm{M}}$$

Les deux premières « équations » (conditions) sont non-temporelles et sont donc en particulier valables à l'équilibre. Les deux dernières sont les équations de « mouvement » de l'électromagnétisme et décrivent les phénomènes hors de l'équilibre.

- on décompose les nouveaux champs $\mathbf{E}^{\mathbf{M}}$ et $\mathbf{H}^{\mathbf{M}}$ en deux parties (réactive et dissipative) :

$$\mathbf{E}^{\mathbf{M}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{H}^{\mathbf{M}} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^{\mathbf{D}}$$

où **E** et **H** sont les dérivées thermodynamique « classiques » de l'énergie interne u par rapport à **D** et **B**.

- les champs dissipatifs doivent s'annuler à l'équilibre. Or les dérivées temporelles s'annulent à l'équilibre ainsi que les rotationnels des champs de vecteurs croisés dans les équations de Maxwell. Liu en déduit par analogie avec la mécanique des fluides que :

$$\mathbf{H}^{\mathbf{D}} = -\alpha \nabla \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E^D} = \beta\nabla \times \mathbf{H}$$

On peut rajouter dans ces champs des termes en gradient qui ne changent rien aux équations de Maxwell puisque le rotationnel d'un gradient est nul. Par exemple, on peut tenir compte de phénomènes irréversibles comme l'effet Peltier en écrivant :

$$\mathbf{E^D} = \beta\nabla \times \mathbf{H} + \gamma\nabla T$$

Les coefficients thermodynamiques α et β sont essentiellement les temps de relaxation de l'aimantation et de la polarisation.

Finalement, Liu propose les équations suivantes de l'électromagnétisme qui tiennent compte des phénomènes dissipatifs électromagnétiques :

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho$$

$$\partial_t \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{I} - \alpha\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} - \beta\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}$$

Liu a discuté dans une suite d'articles [10] les différentes conséquences de la théorie hydrodynamique des équations de Maxwell. Les champs d'application qu'il a répertoriés sont les ferrofluides, les liquides diélectriques, les cristaux liquides nématiques, les supraconducteurs. On peut ajouter la mécanique des fluides grâce à l'analogie découverte par Marmanis.

Les nouvelles équations font intervenir des dérivées du deuxième ordre. Ainsi, de nouvelles conditions aux limites doivent être ajoutées pour rendre compte de la physique sous-jacente. Cependant, l'intérêt principal de cet ordre de dérivée supplémentaire est d'introduire explicitement une « sous-structure » dans les phénomènes observés. Par exemple, les filaments de vorticité observés récemment dans les simulations numériques de la turbulence sont des indices de la présence d'échelles caractéristiques plus petites que celle de l'écoulement moyen. Il reste à déterminer ce que pourrait être cette « sous-structure » en électromagnétisme.

4 Rapide revue des expériences

Mario Liu [10] et Müller & Engel [11] ont proposé différentes expériences dans les ferrofluides. A l'heure actuelle, ces expériences ne semblent pas décisives quant à la validation ou non de la théorie hydrodynamique. L'auteur et Julien Broaweys du LMDH à Jussieu (Paris) ont tenté qualitativement la première expérience proposée par Müller & Engel et il semble que le comportement prévu soit masqué par un effet de bord. Un ferrofluide soumis à un champ alternatif incliné à 45° par rapport à la surface libre devrait osciller à une fréquence double de celle du champ. L'intensité du champ magnétique était inférieure à la valeur critique correspondant à l'instabilité de Faraday. Une oscillation a été observée mais il semble qu'elle soit initiée par la présence des parois du récipient. En effet, il est connu des expérimentateurs que les parois provoquent une sorte d'effet de pointes où se développe une force proportionnelle au carré du champ appliqué. Or, ceci crée une harmonique d'ordre deux en fréquence. Ainsi, il est difficile de discriminer cet effet parasite en surface de l'effet prévu en volume par la théorie hydrodynamique…

5 Conclusions

Deux chercheurs ont indépendamment proposé de modifier les équations de Maxwell pour tenir compte d'effets dissipatifs de type électromagnétique dans les milieux continus. Il est crucial que des expériences soient menées de même que soient analysées théoriquement les conséquences de cette nouvelle description effective de l'électrodynamique des milieux continus.

Références

[1] Roche J.J., B and H, the intensity vectors of magnetism : a new approach to resolving a century-old controversy, 2000, **68**, (5), American Journal of Physics.

[2] Jackson J.D., Classical Electrodynamics, third edition, 1998, John Wiley & Sons, Inc.

[3] Moffatt H.K., Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology, 1985, Volume 159, p. 359-378, Journal of Fluid Mechanics.

[4] Marmanis H., Analogy between the Navier-Stokes equations and Maxwell's equations : Application to turbulence, 1998, Volume 10, Number 6, p. 1428-1437, Physics of Fluids.

[5] Marmanis H., Turbulence, electromagnetism and quantum mechanics : A common perspective, 1999, Photon : Old problems in light of new ideas, Ed. V.V. Dvoeglazov, NovaScience Publications.

[6] Shridar S., Turbulent transport of a tracer : an electromagnetic formulation, 1998, Volume 58, Number 1, p.522-525, Physical Review E.

[7] Semon M.D., Taylor J.R., Thoughts on the magnetic vector potential, 1996, **64** (11), American Journal of Physics.

[8] Liu M., Hydrodynamic Theory of Electromagnetic Fields in Continuous Media, 1993, Volume 70, Number 23, p. 3580-3583, Physical Review Letters.

[9] Liu M., Maxwell Equations and Irreversibility. Submitted for publication.

[10] Liu M., Site Internet : **http://www.itp.uni-hannover.de/~liu/welcome.htm**

[11] Müller H.W. & Engel A., Dissipation in ferrofluids : Mesoscopic versus hydrodynamic theory, 1999, Volume 60, Number 6, p. 7001-7009, Physical Review E.

Manuscrit reçu le 12 octobre 2000