bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales

MATHÉMATIQUES ET SCIENCES PHYSIQUES

La revue trimestrielle de l'Union des professeurs de spéciales

Directeur de la publication : Johan YEBBOU
Rédacteur en chef : François RANTY

Siège social et secrétariat
3, rue de l'Ecole Polytechnique
75005 PARIS
Téléphone et télécopie : 01 43 26 97 92
E-mail : ups@prepas.org

Prix du numéro : 3,10 euros. Abonnement (4 numéros annuels) : 11 euros.
Adresser les demandes d'abonnement et leur règlement au secrétariat,
3, rue de l'Ecole Polytechnique, 75005 PARIS.

CPPAP 0211 G 78674 Dépot légal à parution

Impression ABS-CGL – 31, avenue Yver-Bapterosses – 45250 BRIARE – 02 38 31 39 70

79e année – N° 216 – Octobre 2006

Sur le caractère galiléen du magnétisme

par Germain ROUSSEAUX
Université de Nice-Sophia Antipolis
INLN – UMR 6618 CNRS-UNSA
1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne
Germain.Rousseaux@inln.cnrs.fr

RÉSUMÉ

L'analyse du mouvement relatif d'une charge test par rapport à un fil neutre parcouru par un courant est considéré comme étant l'archétype du caractère « relativiste einsteinien » du magnétisme. Grâce à l'électromagnétisme galiléen à la Lévy-Leblond & Le Bellac, nous montrons que le magnétisme est bien d'origine « relativiste galiléenne ».

1. Introduction et rappels

A partir des considérations présentées dans [1], nous allons réexaminer le problème du fil neutre au repos parcouru par un courant en interaction avec une charge test en mouvement. Rappelons tout d'abord que Lévy-Leblond & Le Bellac ont montré que les transformations galiléennes du quadricourant $(\boldsymbol{j}, \rho c_L)$ diffèrent suivant la limite dite électrique ou celle, dite magnétique. On obtient ces limites en partant de l'expression des transformations de Poincaré-Lorentz d'un quadri-vecteur quelconque $(\boldsymbol{u}, u_0)$ appliqué au quadri-courant $(\boldsymbol{j}, \rho c_L)$:

$$u'_0 = \gamma\Big(u_0 \frac{\mathbf{v} \bullet \boldsymbol{u}}{c_L}\Big),$$

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\gamma - 1}{v_2}\big(\boldsymbol{u} \bullet \mathbf{v}\big)\mathbf{v} + \boldsymbol{u} - \frac{\gamma\,\boldsymbol{v} u_0}{c_L}$$

avec $\gamma = \big(1 - \mathbf{v}^2/c_L^2\big)^{-1/2}$ où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse relative entre deux référentiels inertiels. Dans la limite magnétique, on suppose que $v = L/\tau \ll c_L$ et $\widetilde{\rho} c_L \gg \widetilde{j}$, ce qui implique que :

$$\rho' = \rho \frac{\mathbf{v} \bullet \boldsymbol{j}}{c_L^2},$$

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}.$$

Dans la limite électrique, on suppose que $v = L/\tau \ll c_L$ et $\widetilde{\rho} c_L \gg \widetilde{j}$, ce qui implique que :

$$\rho' = \rho,$$

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j} - \rho\mathbf{v}$$

où L (τ) représente l'ordre de grandeur d'une échelle (un temps) caractéristique du problème électromagnétique envisagé et $\widetilde{j}$ $(\widetilde{\rho})$ l'ordre de grandeur de la densité de courants (charges) dans le système ; c_L représente évidemment la célérité de la lumière.

On peut appliquer le même raisonnement à l'hexa-vecteur champ électromagnétique :

$$\boldsymbol{E}' = \gamma(\boldsymbol{E} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{(1-\gamma)(\mathbf{v} \bullet \boldsymbol{E})\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}$$

et :

$$\boldsymbol{B}' = \gamma\big(\boldsymbol{B} - (1/c_L^{\,2})\mathbf{v} \times \boldsymbol{E}\big) + \frac{(1-\gamma)(\mathbf{v} \bullet \boldsymbol{B})\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}$$

avec $|\mathbf{v}|/c_L \ll 1$ et $E \ll c_L B$ ou bien $|\mathbf{v}|/c_L \ll 1$ et $E \gg c_L B$, il vient la limite magnétique :

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{B} \;\text{ et }\; \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$$

ou bien la limite électrique :

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} \;\text{ et }\; \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - (1/c_L^{\,2})\mathbf{v} \times \boldsymbol{E}.$$

2. Le magnétisme comme un phénomène relativiste “einsteinien”

Nous allons d'abord rappeler la résolution habituelle du problème [2, 3, 4]. Considérons un câble électrique constitué d'un réseau de charges positives stationnaires de densité ρ_+ dans lequel des charges négatives de densité ρ_- se déplacent à la vitesse moyenne v_-. Une charge test négative q se déplace dans la même direction que le fil à une distance r et on fera, pour simplifier, l'hypothèse que $v = v_-$. Notons $\mathcal{R}$ le référentiel dans lequel le fil est au repos et $\mathcal{R}'$ le référentiel où la charge est au repos. Dans $\mathcal{R}$, la force magnétique de Lorentz en $q(\mathbf{v} >< \boldsymbol{B})$ s'exerce sur la particule test qui s'enroule vers le fil. Dans $\mathcal{R}'$, il n'y a pas de force magnétique puisque que la vitesse de la charge est nulle. Or, la particule devrait voir le fil se rapprocher si l'on en croit l'analyse dans $\mathcal{R}$...

Pour évaluer la force magnétique dans $\mathcal{R}$, on se rappelle que le champ magnétique s'exprime par $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ où le courant $I = \rho_- v_- S$ est la quantité de charge passant par seconde à travers une section transverse S du câble et μ_0 la perméabilité du vide. Ainsi, la force magnétique de Lorentz est égale à $F_B = (\mu_0 \rho_- S q v^2)/(2\pi r)$.

De plus, comme le fil est neutre dans $\mathcal{R}$, $\rho_- = -\rho_+$. Or, si la charge se conserve, la densité de charge peut varier car les longueurs varient en relativité «einsteinienne». Si L_0 est la longueur d'une fraction du câble électrique, un observateur en mouvement constate une contraction de cette partie du fil, qui devient $L = L_0/\gamma$ où :

$$\gamma = \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c_L^{\,2}}\right)^{-1/2}.$$

La conservation de la charge implique que la densité de charge dans le référentiel de l'observateur devient $\rho = \rho_0 \gamma$. On en déduit alors que la densité de charge positive dans $\mathcal{R}$ est $\rho_+{}' = \rho_+ \gamma$. Dans $\mathcal{R}'$, ce sont les charges négatives qui sont au repos, donc en mouvement dans $\mathcal{R}$: $\rho_-{}' = \rho_-/\gamma$. La densité de charge totale dans $\mathcal{R}'$ n'est pas nulle, égale à $\rho' = \rho_+{}' + \rho_-{}' = (\rho_+ \gamma v^2)/c_L^{\,2}$.

Par ailleurs, on sait en électrostatique qu'un fil chargé de densité de charge ρ et de section S crée un champ électrique à une distance r égal à $E = \rho S/(2\pi\varepsilon_0 r)$. Ainsi, la densité de charge totale dans $\mathcal{R}'$ est à l'origine d'une force électrique :

$$F_E{}' = qE' = \frac{\rho_+ \gamma v^2 S q}{2\pi\varepsilon_0 r c_L^{\,2}}.$$

De retour dans $\mathcal{R}$, on a :

$$F_E = \frac{F_E{}'}{\gamma} = \frac{\rho_+ v^2 S q}{2\pi\varepsilon_0 r {c_L}^2},$$

égale à la force magnétique de Lorentz F_B, ce qui termine la résolution habituelle du problème, où il est d'usage de conclure que le magnétisme a pour origine l'électrostatique associée à la contraction des longueurs «relativiste».

3. Critique de la présentation classique et difficultés rencontrées

Maintenant, on peut remarquer que la vitesse de dérive des électrons dans un câble électrique courant est en unité de célérité de la lumière de l'ordre de 10^{-13}, ce qui implique que le facteur $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2/{c_L}^2)^{-1/2}$ diffère de l'unité d'une valeur de l'ordre de 10^{-26}, considérablement petite. L'auteur de cet article n'est pas convaincu qu'une aussi petite différence puisse induire un phénomène relativiste «einsteinien» ce qui est pourtant communément admis...

Il est essentiel de se rappeler, à ce niveau de la discussion, que la densité de charge totale dans $\mathcal{R}'$ est $\rho' = (\rho_+ \gamma v^2)/{c_L}^2$, alors que la densité de charge dans $\mathcal{R}$ est nulle. De plus, une rapide comparaison entre la loi de transformation de la densité de charge dans la limite magnétique :

$$\rho' = \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{j}}{{c_L}^2}$$

avec l'expression de ρ' ci-dessus, montre qu'elles diffèrent uniquement par le facteur γ. En effet, la limite magnétique est obtenue sous les hypothèses $v \ll c_L$ et $\widetilde{\rho} c_L \ll \widetilde{j}$ prises dans le référentiel $\mathcal{R}$. La seconde hypothèse est vérifiée ici car $\widetilde{\rho} = 0$ (la densité de charge dans $\mathcal{R}$ est nulle) et $\widetilde{j}$ a pour ordre de grandeur la norme de $j_m = \rho_- v_- = -\rho_+ v$. La première hypothèse conduit à considérer que γ est d'ordre 1 (au facteur 10^{-26} près !), ce qui paraît raisonnable. Ainsi, la densité de charge dans $\mathcal{R}'$ devient :

$$\rho_m{}' = \frac{\rho_+ v^2}{{c_L}^2} = -v \frac{-\rho_+ v}{{c_L}^2} = -v \frac{j_m}{{c_L}^2}$$

où l'indice m indique que l'on est dans la limite magnétique de Lévy-Leblond & Le Bellac dans le référentiel $\mathcal{R}$ du point de vue du fil.

Nous avons donc montré que la force magnétique dans le référentiel $\mathcal{R}$ pouvait s'interpréter comme une force électrique dans le référentiel $\mathcal{R}'$ dont l'origine est liée à l'apparition d'une charge $\rho_m{}' = -v j_m/{c_L}^2$ dans un cadre purement galiléen correspondant à la limite magnétique de Lévy-Leblond & Le Bellac. Or, la contraction des longueurs est absente de la physique galiléenne, donc on ne peut pas attribuer à celle-là l'origine du magnétisme comme il est généralement supposé.

Le lecteur attentif pourrait souligner le paradoxe suivant. En effet, la densité de courant a été modélisé par le produit de la densité de charge ρ et d'une vitesse v, ce qui semble contradictoire avec l'invariance (et donc la covariance) de la densité de courant «magnétique» dans un changement de référentiel galiléen, puisque la vitesse devrait changer ; en effet le courant serait de nature convective ($j_m{}'$ serait différent de j_m). Cependant, la vitesse est ici celle des porteurs de charge relativement à la matrice métallique, peu importe que cette dernière soit en mouvement ou pas. Donc le courant est bien de nature conductrice et il est incompatible avec une convection des charges. On est bien dans la limite magnétique du point de vue du courant.

De manière plus théorique, on peut se donner directement j_m sans faire d'hypothèse sur la nature du courant, puis on applique la limite magnétique pour ρ_m et l'on trouve qu'une charge apparaît. Notons que le champ magnétique s'exprime en fonction du champ électrique engendré par cette charge magnétique effective selon :

$$B = \frac{\mu_0 \rho_- v S}{2\pi r} = \frac{-\rho_+ v S}{2\pi \varepsilon_0 r c_L^2} = -\frac{v}{c_L^2} E'$$

c'est-à-dire, en notation vectorielle :

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}}{c_L^2}$$

avec $B' = 0$ et $E' = E$. On se retrouve donc bien dans la limite électrique du point de vue de la charge test.

4. Conclusions

Contrairement à l'opinion commune, le magnétisme n'est pas un phénomène issu uniquement de la relativité « einsteinienne » (c'est-à-dire en accord avec les transformations de Poincaré-Lorentz) résultant de la contraction des longueurs, mais est bien en première approximation un phénomène qui peut s'interpréter comme étant d'origine relativiste « galiléenne » (c'est-à-dire en accord avec les transformations de Galilée).

Références bibliographiques

[1] G. Rousseaux & A. Domps, *Remarques supplémentaires sur l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme*, Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, Vol. 98, 868 (2), p. 71-86, Novembre 2004. Article (not printable) available online at : http://www.udppc.asso.fr/bup/868/0868D071.pdf.

G. Rousseaux, *Lorenz or Coulomb in Galilean Electromagnetism ?*, EuroPhysics Letters, 71 (1), p. 15-20, 2005 ; http://fr.arxiv.org/abs/physics/0502129.

G. Rousseaux, *Remarques sur l'électrodynamique des corps en mouvement selon Einstein*, Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales, N° 214, Avril 2006.

M. de Montigny et G. Rousseaux, *On the Electrodynamics of Moving Bodies at Low Velocities*, European Journal of Physics, Vol. 27, Number 4, p. 755-768, 2006 ; http://fr.arxiv.org/abs/physics/0512200.

[2] M. Born, *Einstein's Theory of Relativity*, Dover Publications, p. 293-297, 1962.

[3] E. M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, MacGraw-Hill, 2e ed., 1985.

[4] R. A. Mould, *Basic Relativity*, Springer-Verlag New York, p. 157-161, 2002.