

Extrait du

Bulletin de l'Union des professeurs de spéciales

n° 213, Janvier 2006

Sur un effet physique attribuable uniquement au potentiel vecteur en électromagnétisme classique

par Germain ROUSSEaux
INLN – CNRS UMR 6638
1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne

Richard KOFMAN et Olivier MINAZZOLI
LPMC – CNRS UMR 6622
Université de Nice, 06108 Nice cedex 2

RÉSUMÉ

Nous présentons la théorie, la modélisation et la discussion d'une expérience qui permet de choisir entre la formulation locale de Riemann-Lorenz et celle non locale de Heaviside-Hertz afin de décrire l'électromagnétisme classique.

Introduction

Cette note fait suite à une série d'articles où l'un d'entre nous (G.R.) a exposé plusieurs arguments théoriques en faveur d'une reformulation dite de Riemann-Lorenz de l'électromagnétisme classique en termes des potentiels contrairement à la formulation généralement enseignée dite de Heaviside-Hertz qui est basée sur les champs [1-4]. Comme dans toute remise en cause d'une théorie par une autre, seule une *experimentum crucis* permet de retenir celle décrivant les faits expérimentaux. A noter que des contributions en relation avec ce sujet sont déjà parues dans le *Bulletin de l'Union des Physiciens* [5-7].

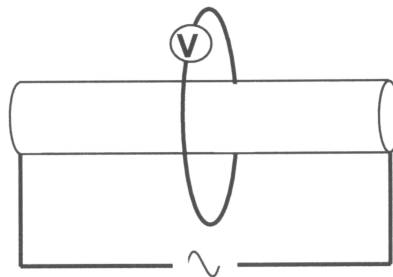


Figure 1 : L'expérience de Maxwell-Lodge

L'expérience qui sera l'objet de cette étude consiste à placer une spire conductrice reliée à un voltmètre autour et à l'extérieur d'un solénoïde parcouru par un courant d'intensité variable (figure 1). On observe un signal de tension dépendant du temps aux bornes du voltmètre. L'idée de l'expérience apparaît dans le *Traité* de James Clerk

MAXWELL dès 1873 [8] et la première mise en œuvre remonte à Oliver LODGE en 1889 [9]. Plusieurs reproductions [10-12] ont depuis corroboré l'existence d'un effet observable bien que les justifications théoriques aient évolué selon les auteurs [10-16]. Nous nous interrogeons sur l'origine physique de l'effet Maxwell-Lodge (M-L).

1. Les descriptions théoriques de l'effet Maxwell-Lodge pour un solénoïde parfait

La première description théorique est celle basée sur la formulation de Heaviside-Hertz : en partant de l'équation différentielle locale de Faraday $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ que l'on intègre sur une surface quelconque délimitée par le circuit formé par la spire externe au solénoïde, on trouve l'équation intégrale reliant la force électromotrice (la circulation du champ électrique le long du circuit fermé) et le flux du champ magnétique à travers la surface [17] :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Le flux du champ magnétique peut être relié facilement au courant I à travers le solénoïde via le coefficient d'inductance L par la relation [17] : $\Phi = LI = \mu_0 n I \pi a^2$ où μ_0 est la perméabilité du vide, n le nombre de spires par unité de longueur et a le rayon du solénoïde. Ainsi, avec une excitation sinusoïdale $I = I_0 \cos(\omega t)$ de pulsation ω , on mesure expérimentalement une tension $U = e = \mu_0 n I_0 \pi a^2 \omega \sin(\omega t)$ aux bornes du voltmètre.

Malgré son étonnante simplicité, cette démonstration n'est pas satisfaisante, de notre point de vue, bien que son résultat soit corroboré par l'expérience et que toutes les formules précédentes soient valables.

Nous voulons soulever une difficulté physique, liée à la formulation de Heaviside-Hertz, qui apparaît lors de l'interprétation de cette expérience. En effet, le champ électrique \mathbf{E} en un point M de la spire extérieure au solénoïde se calcule à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday : $\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}_M) = -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_M)$ qui est une équation locale. Or $\mathbf{B}(\mathbf{r}_M)$ est nul pour un point M extérieur au solénoïde. Même si l'aspect mathématique est correct puisque la résolution de $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_M) = \mathbf{0}$ en coordonnées cylindriques permet de trouver :

$$E_\theta = \frac{Cte}{r},$$

comment un porteur de charge (un électron en l'occurrence) situé dans la spire enroulant le solénoïde et qui est soumis au champ électrique d'induction « sait-il » que le champ magnétique (qui est nul en sa position) varie à l'intérieur du solénoïde ? Plus précisément, selon l'explication précédente, un champ magnétique dans le solénoïde serait à l'origine de la création d'un champ électrique dans la spire située hors du solénoïde : si tel est le cas, ce serait un exemple d'action à distance en électromagnétisme classique, c'est-à-dire un effet non local. Formulée autrement, quelle est l'origine du champ électrique local dans la spire ? La démonstration précédente montre que c'est le champ magnétique dans le solénoïde.

Cette explication est de notre point de vue inacceptable car l'électromagnétisme est jusqu'à preuve du contraire une théorie locale. Comment peut-on, dans un phénomène temporel et en l'absence de charges statiques, rendre compte de l'apparition d'un champ électrique en un point de l'espace où le champ magnétique est absent ?

La réponse se trouve dans le *Traité* de Maxwell [8] : « *The conception of such a quantity, on the changes of which, and not on its absolute magnitude, the induction currents*

depends, occurred to FARADAY at an early stage of his researches. He observed that the secondary circuit, when at rest in an electromagnetic field which remains of constant intensity, does not show any electrical effect, whereas, if the same state of the field had been suddenly produced, there would have been a current. Again, if the primary circuit is removed from the field, or the magnetic forces abolished, there is a current of the opposite kind. He therefore recognised in the secondary circuit, when in the electromagnetic field, a “peculiar electrical condition of matter” to which he gave the name of *Electrotonic State*. »

Selon William WHEWELL (un des professeurs de MAXWELL), l'état électrotonique de Faraday se traduit par l'existence d'une quantité de mouvement dans le milieu. La résistance du milieu à la formation d'un courant est analogue à l'inertie qui s'oppose à la mise en mouvement d'un objet matériel [18] ;

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \iff \text{Capacité à produire un courant} = \begin{cases} \text{variation temporelle} \\ \text{de l'état électrotonique} \end{cases}$$

$$\text{Inductance d'un circuit} \iff \text{Inertie d'une masse}$$

MAXWELL identifie le potentiel vecteur moderne comme étant l'intensité électrotonique qu'il appelle aussi la quantité de mouvement électrocinétique ou électromagnétique et dont la dérivée temporelle, en l'occurrence le champ électrique, produit une force électromotrice [8] :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \iff \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}.$$

La loi empirique de Lenz (1834) sur l'induction explique le signe négatif.

Selon MAXWELL : « *The Electrokinetic momentum at a point represents in direction and magnitude the time-integral of the electromotive intensity which a particle placed at this point would experience if the currents were suddenly stopped. Let A_x, A_y, A_z represent the components of the electromagnetic momentum at any point of the field, due to any system of magnets or currents. Then A_x is the total impulse of the electromotive force in the direction of x that would be generated by the removal of these magnets or currents from the field, that is, if E_x be the electromotive force at any instant during the removal of the system : $A_x = \int E_x dt$.*

Hence the part of the electromotive force which depends on the motion of magnets or currents in the field, or their alteration of intensity, is :

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t}, E_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t}, E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

If there is no motion or change of strength of currents or magnets in the field, the electromotive force is entirely due to variation of electric potential, and we shall have :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. »$$

Le potentiel vecteur est une impulsion électromagnétique c'est-à-dire une variation de quantité de mouvement électromagnétique selon la définition mécanique d'une impulsion. Or il est nécessaire de se donner un référentiel pour définir une impulsion mécanique, ce qui se traduit par l'existence d'une constante de référence pour le potentiel vecteur. D'une manière moderne, on peut donc donner la définition suivante : le potentiel vecteur en un point M est l'impulsion qu'un opérateur extérieur doit fournir mécaniquement à une charge unité pour l'amener de l'infini, où par convention celui-ci est nul, jusqu'au point M .

Toujours selon MAXWELL : « *We have now obtained in the electrotonic intensity the means of avoiding the consideration of the quantity of magnetic induction which passes through the circuit. Instead of this artificial method we have the natural one of considering the current with reference to quantities existing in the same space as the current itself.* » En effet, le flux du champ magnétique n'est autre que la circulation du potentiel vecteur d'après le théorème de Stokes et il est tout à fait envisageable que le circuit soit dans une région exempte de champ bien qu'il entoure une zone intérieure avec champ.

Retournons à l'effet Maxwell-Lodge dans la formulation de Riemann-Lorenz. Hors du solénoïde, le champ magnétique est nul mais le potentiel vecteur est égal à un gradient [1] :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{//} = \nabla \left(\frac{\Phi \theta}{2\pi} \right) = \frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta.$$

Même si le courant et le flux dans le solénoïde varient, ce potentiel vecteur non nul ne crée pas de champ magnétique à l'extérieur du solénoïde (on se place dans l'A.R.Q.S. où il n'y a pas de champ de radiation) : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, mais il crée un champ électrique :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{d\Phi}{dt} \frac{\theta}{2\pi} \right) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt} \mathbf{e}_\theta$$

qui est irrotationnel dans la spire en dehors du solénoïde ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_{//}$) : $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ (même si le champ magnétique dans le solénoïde varie). La force électromotrice résultante (circulation du champ électrique sur le circuit de la spire) est bien indépendante du rayon de la spire ; $e = \mu_0 n I_0 \pi a^2 \omega \sin(\omega t)$. On mesure donc une tension aux bornes du voltmètre et pas une différence de potentiel scalaire dans ce cas précis.

On retrouve le résultat de la formulation de Heaviside-Hertz avec la formulation de Riemann-Lorenz à la différence cruciale que le champ électrique donc la tension mesurée dans la spire a pour origine le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde via la médiation locale par le potentiel vecteur qui seul, est non nul à l'extérieur du solénoïde contrairement au champ magnétique. L'intervention du potentiel vecteur est de notre point de vue essentielle à la compréhension physique du phénomène d'autant plus que le courant dans la spire résulte du transfert de quantité de mouvement du champ vers les porteurs de charge grâce au potentiel vecteur qui est bien une impulsion dans le champ [19].

2. Liens entre l'effet Maxwell-Lodge et l'effet Aharonov-Bohm (A-B)

Une source électronique crée des figures d'interférence dans l'expérience des fentes d'Young (dualité onde-corpuscule). Si, derrière et entre les fentes, on place un solénoïde parcouru par un courant stationnaire, celui-ci produit un champ magnétique non nul dans le solénoïde. La présence du solénoïde se traduit par une translation de la figure d'interférence due à un déphasage proportionnel au flux du champ magnétique dans le solénoïde : c'est l'effet Aharonov-Bohm vectoriel [20].

Deux écoles de pensée interprètent différemment les faits précédents selon que l'effet est attribué au champ magnétique à l'intérieur du solénoïde ou au potentiel vecteur en dehors du solénoïde [21]. Les deux écoles font l'hypothèse que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde comme corroboré par les expériences de TONOMURA et al. [22] qui ont écarté le fait que l'effet A-B soit dû à un champ magnétique de fuite ce

qui avait été un contre-argument à la réalisation expérimentale de CHAMBERS [22] où des fuites étaient présentes.

— Soit l'effet A-B est un effet non-local tel que l'onde électronique «sent» la présence du champ magnétique même si l'on s'assure par un blindage que les électrons ne pénètrent pas dans le solénoïde. Pour justifier cette interprétation, on invoque le fait que la Physique quantique est une théorie non locale en particulier depuis les expériences d'A. ASPECT [23]. Par ailleurs, il est dit que l'«observable» (le décalage) s'exprime uniquement en fonction du champ uniforme à l'intérieur du solénoïde et pas en fonction du potentiel vecteur non nul à l'extérieur.

— Soit l'effet A-B est un effet local tel que l'onde électronique subit un déphasage, à l'extérieur du solénoïde, région de l'espace où le potentiel vecteur est non nul. Ceci correspond à la formulation théorique initiale avancée par AHARONOV et BOHM. L'effet A-B a ceci d'extraordinaire que l'on peut attribuer un phénomène physique au potentiel vecteur en l'absence de champ magnétique et électrique dans le cadre de la Physique quantique. FEYNMAN a exprimé ce point de vue sur l'effet Aharonov-Bohm dans une jonction Josephson qu'il appelle effet Mercereau [24-25] : «*What ? Do you mean to tell me that I can tell you how much magnetic field there is inside of here by measuring currents through here and here — through wires which are entirely outside — through wires in which there is no magnetic field. . . In quantum mechanical interference experiments there can be situations in which classically there would be no expected influence whatever. But nevertheless there is an influence. Is it action at distance ? No, A is as real as B — realer, whatever that means.*»

FEYNMAN utilise l'adjectif «réel» pour qualifier la nature physique du potentiel vecteur [20]. En effet, pour FEYNMAN un champ réel est défini par «*un ensemble de nombres que l'on spécifie de telle sorte que ce qui arrive en un point dépend uniquement des nombres en ce point. On n'a pas besoin d'en savoir plus sur ce qui se passe en d'autres endroits.*» De la même manière, la circulation du champ électrique dans les phénomènes d'induction dépend de la variation temporelle du potentiel vecteur localement tout au long du circuit. L'effet M-L serait tel que l'on peut attribuer un phénomène physique (apparition d'un champ électrique local) à la présence d'un potentiel vecteur local bien que le champ magnétique local soit absent.

3. Discussion sur les aspects géométriques et énergétiques de l'effet Maxwell-Lodge

L'explication de l'effet M-L en terme du potentiel vecteur soulève un paradoxe quant au processus géométrique sous-jacent à l'apparition d'une force électromotrice dans un circuit. Auparavant, nous devons faire un petit détour historique. En effet, rappelons que FARADAY décrivait les phénomènes d'induction d'une manière géométrique [8-27] : «*the phenomena of electromagnetic force and induction in a circuit depend on the variation of the number of lines of magnetic induction which pass through the circuit*» sachant que, selon MAXWELL, «*the number of these lines is expressed mathematically by the surface-integral of the magnetic induction through any surface bounded by the circuit.*»

POYNTING précisa ce point pour aider à visualiser géométriquement le potentiel vecteur [28] : «*The assumption that if we take any closed curve, the number of tubes of magnetic induction passing through it is equal to the excess of the number which have moved in over the number which have moved out through the boundary since the beginning*

of the formation of the field, suggests a historical mode of describing the state of the field at any moment... One can define A_x, A_y, A_z as the number of tubes of magnetic induction which would cut the axes $[(Ox), (Oy), (Oz)]$ per unit length if the system were to be allowed to return to its original unmagnetic condition, the tubes now moving in the opposite direction. »

Cette vision géométrique des phénomènes d'induction utilise la notion de lignes et de tubes. Ces quantités, qui ne sont qu'une aide à la visualisation des champs, peuvent-elles expliquer la naissance d'une fem dans la spire? En effet, comment le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par la spire pourrait-il varier sans que les tubes de champ ne coupent le circuit (et donc qu'un champ magnétique soit présent en chaque point de la spire [9-28]) ?

En effet, selon POYNTING : « *Change in the total quantity of magnetic induction passing through a closed curve should always be produced by the passage of induction tubes through the curves inwards or outwards... [However], when a part of a circuit is between the poles of an electromagnet whose magnetising current is changing, we have no direct experimental evidence of the movement of induction in or out. But the induction tubes are closed, and to make them thread a circuit we might expect that they would have to cut through the boundary. The alternative seems to be that they should grow or diminish from within, the change in intensity being propagated along the tubes. This would be inconsistent with their closed nature $[\nabla \cdot \mathbf{B} = 0]$, unless the energy were instantaneously propagated along the whole length, and his further negated by the theory of the transfer of energy, which implies that the energy flows transversely to the direction of the tubes. I shall suppose, then, that alteration in the quantity of magnetic induction through a closed curve is always produced by motion of induction tubes inwards or outwards through the bounding curve. »*

En plus de la difficulté géométrique, POYNTING souligne une difficulté d'ordre énergétique. En effet, le vecteur de Poynting doit être dirigé transversalement à la direction des lignes de champ magnétique ce qui est une indication supplémentaire, selon lui, de la nécessité d'un mouvement des tubes à travers le circuit afin d'expliquer l'origine du transfert énergétique.

Or, précisément, la géométrie du solénoïde est telle que le flux varie non pas à cause de tubes coupant le circuit mais en étant modifié de l'intérieur du solénoïde (sans interagir avec la spire) par une variation d'intensité du courant donc du module du champ magnétique (à surface constante) qui se propage instantanément le long des tubes car le solénoïde est considéré dans l'A.R.Q.S. où les effets de retard sont négligeables. Le nombre de tubes ne varie pas. De plus, le caractère solénoïdal du champ magnétique signifie que les tubes soit se referment sur eux en formant des boucles soit partent à l'infini. Dans le cadre d'un solénoïde parfait ou torique, les tubes présents à l'intérieur du solénoïde ne coupent pas la spire. Pour un solénoïde de taille finie, certes les tubes de champs se rebouclent à l'extérieur mais une variation de courant dans le solénoïde ne les fait pas se déplacer et couper la spire.

Concernant l'aspect énergétique, lorsque la spire est en circuit ouvert, le solénoïde ne transmet pas d'énergie via un vecteur de Poynting transverse étant donné qu'aucun courant ne circule dans la spire (malgré le fait que l'on détecte une tension périodique). Lorsque le circuit est fermé, il y a bien un flux d'énergie transverse via le vecteur de Poynting mais celui-ci n'est pas construit avec un hypothétique champ magnétique issu du solénoïde mais avec le champ magnétique induit dans la spire par le champ

électrique crée par le potentiel vecteur. Le bilan a été examiné judicieusement par GOUGH & RICHARDS [15].

Ainsi, aucun des arguments de POYNTING ne tient et la vision géométrique de Faraday-Maxwell, même si elle se révèle fructueuse dans la plupart des cas, ne s'applique pas à l'effet Maxwell-Lodge. On lira avec grand intérêt l'analyse limpide et profonde de J. ROCHE sur cette limitation de l'explication des phénomènes d'induction en termes de lignes de champ [29].

On peut établir une analogie entre un solénoïde et un tourbillon afin de préciser notre discussion [16]. En effet, un tourbillon de vidange en mécanique des fluides peut être modélisé par les équations suivantes : $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, équation de continuité hydrodynamique ; $\mathbf{u} = (\Gamma/(2\pi r))\mathbf{e}_\theta$, champ de vitesse en dehors du tourbillon où Γ est la circulation de la vitesse ou le flux de vortacité ; $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{w} \times \mathbf{r}$, champ de vitesse dans le tourbillon où $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$ est la vortacité et $\mathbf{a}_{cc} = \partial_t \mathbf{u}$ l'accélération résultante due à une variation de vitesse. Pour le solénoïde en électromagnétisme, on a $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, équation de continuité électromagnétique ; $\mathbf{A} = (\Phi/(2\pi r))\mathbf{e}_\theta$, potentiel vecteur en dehors du solénoïde où Φ est le flux de champ magnétique ou la circulation du potentiel vecteur ; $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$, potentiel vecteur dans le solénoïde où $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ est le champ magnétique et $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$ le champ électrique résultant dû à une variation de potentiel vecteur.

Admettre que le flux de champ magnétique change par une variation du nombre de tubes magnétiques impliquerait de même pour la vortacité associée au tourbillon. Or on ne voit pas comment de la vortacité venant de l'infini pourrait se propager instantanément à travers la zone irrotationnelle pour modifier la vortacité au cœur du tourbillon et inversement. Par ailleurs, pour un tourbillon de vidange de baignoire par exemple, on peut modifier le débit de sortie en aspirant ce qui a pour conséquence l'augmentation de vortacité de l'intérieur de la zone rotationnelle (qui se traduit par une augmentation de vitesse d'où une accélération dans la zone irrotationnelle à l'extérieur du tourbillon). L'augmentation de débit est analogue à l'augmentation d'intensité de courant électrique ce qui a pour conséquence l'augmentation de champ magnétique de l'intérieur du solénoïde dans la zone rotationnelle (qui se traduit par une augmentation de potentiel vecteur donc de champ électrique dans la zone irrotationnelle à l'extérieur du solénoïde).

4. La modélisation d'un solénoïde de taille finie

Tout d'abord, faisons une liste des hypothèses utilisées dans le calcul de l'effet Maxwell-Lodge rappelé au § 1 :

- Le solénoïde est infini : il n'y a pas de fuites en haut et en bas.
- Le solénoïde est constitué de spires non inclinées : il n'y a pas de fuites sur les bords.
- Les radiations (ondes) sont négligeables (donc les effets de retard) car le solénoïde fonctionne dans l'approximation des régimes quasi stationnaire (A.R.Q.S.) : $a\omega \ll c$ où c est la célérité de la lumière.
- Les équations qui décrivent le solénoïde sont celles de la limite magnétique de LÉVY-LEBLOND & LE BELLAC [3] car la densité volumique de charge est nulle et la densité volumique de courant est non nulle ($\rho c \ll J$).

Nous allons vérifier si les fuites d'origine géométrique (taille finie et inclinaison des spires du solénoïde) peuvent être à l'origine de la tension mesurée, ce qui serait un

contre-argument à une interprétation basée sur le potentiel vecteur . . .

D'une manière générale, on peut identifier quatre contributions au champ magnétique total \mathbf{B}_T :

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_{\text{ARQS}} + \mathbf{B}_{\text{rad}} + \mathbf{B}_f^l + \mathbf{B}_f^\alpha$$

où \mathbf{B}_{ARQS} est le champ quasi statique, \mathbf{B}_{rad} le champ radiatif (tenant éventuellement compte des fuites), \mathbf{B}_f^l le champ de fuite quasi statique associé à la longueur l finie du solénoïde et \mathbf{B}_f^α le champ de fuite quasi statique associé à l'inclinaison des spires d'un angle α .

Un raisonnement en ordre de grandeur permet d'évaluer l'importance relative du champ radiatif par rapport au champ quasi statique :

$$\frac{B_{\text{rad}}}{B_{\text{ARQS}}} \approx \frac{a\omega}{c}$$

où dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, on a :

$$\frac{a\omega}{c} \approx \frac{10^{-1} \times 10^2}{10^8} \approx 10^{-7} \ll 1.$$

On se placera donc dans l'A.R.Q.S. sachant que les champs électriques créés par induction seront reliés aux champs magnétiques par une relation du type : $E^i \approx a\omega B^i$. Pour tenir compte de la géométrie du solénoïde, nous avons modélisé celui-ci par la superposition sur une longueur l de spires inclinées d'un angle γ . L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'accéder au champ magnétique créé à l'extérieur par la taille finie du solénoïde ; elle permet donc de rendre compte du champ de fuite dû à l'inclinaison des spires et à leur écartement. En fait, on considère des spires infiniment fines ce qui majore, dans la simulation, le champ de fuite dû à l'écartement des spires ; si ce champ de fuite majoré est négligeable, le champ de fuite vrai le sera aussi.

4.1. Potentiel vecteur créé par une spire de rayon a

Nous sommes dans la limite magnétique, ce qui nous permet de travailler dans la jauge de Coulomb [3]. On utilise le repère sphérique (r, θ, φ) .

Soit $J_\varphi = I \sin(\theta) \delta(\cos \theta) \frac{\delta(r' - a)}{a}$ la densité volumique de courant à travers la spire.

D'après JACKSON [17], le champ créé par une spire parcourue par un courant I s'écrit :

$$A_\varphi = \frac{I}{sa} \int \frac{r'^2 dr' d\Omega' \sin \theta' \cos \varphi' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi')}} \quad (1)$$

où $\frac{1}{s} = \frac{\mu_0}{4\pi}$, ce qui donne :

$$A_\varphi(r, \theta) = \frac{Ia}{s} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi'}} d\varphi' \quad (2)$$

Anticipons un peu et raisonnons avec des spires pouvant être inclinées.

Les spires s'enroulant autour d'une bobine, sont inclinées de telle manière que quels que soient φ , elles semblent toujours inclinées avec le même angle (figure 2, page suivante).

Soit γ cet angle et soit A_φ^i le potentiel vecteur créé par une spire inclinée. Par projection on obtient les composantes de A :

$$A_r = A_\varphi^i \sin \gamma \cos \theta, \quad A_\theta = A_\varphi^i \sin \gamma \sin \theta, \quad A_\varphi = A_\varphi^i \cos \gamma.$$

4.2. Potentiel vecteur et champs créés en un point par N spires

Pour simuler le solénoïde, il suffit maintenant de sommer, en un point $M | (r, \theta, \varphi)$, les potentiels vecteurs créés par chaque spire. Pour des raisons de symétrie évidentes, on passe en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Soit L la hauteur du solénoïde et θ_i l'angle que fait la spire N_i avec l'axe des z pour le calcul d'un point qui se trouve à une distance l du solénoïde et à une hauteur d par rapport au milieu du solénoïde (figure 3). L'écart entre chaque spire est ε .

Nous pouvons distinguer deux cas pour le calcul du champ créé par une spire. Le premier lorsque θ_i est inférieur à $\pi/2$, le second lorsqu'il est supérieur à $\pi/2$. Le second cas est obtenu lorsque l'on calcule le champ pour des spires supérieures à une certaine limite que nous numérotions N_{sup} . On a :

$$N_{sup} = \text{INT}\left(\frac{d + L/2}{\varepsilon}\right)$$

où INT est la fonction qui renvoie la partie entière de l'argument.

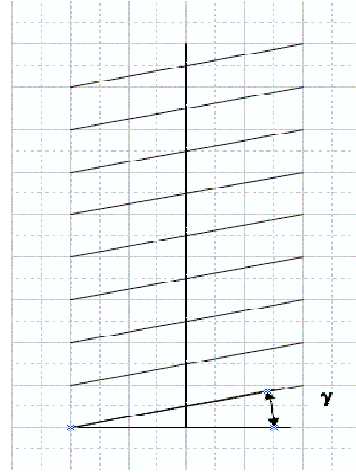


Figure 2 : Inclinaison des spires

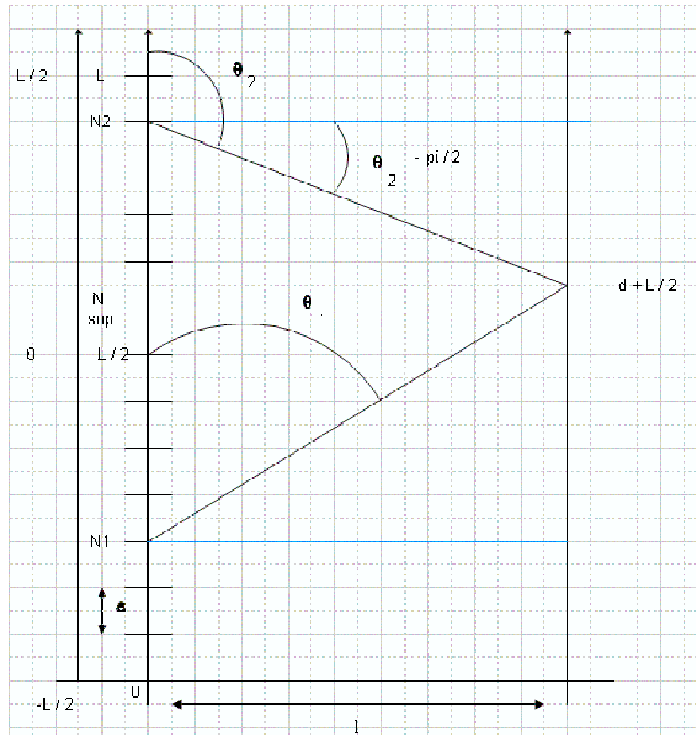


Figure 3 : Calcul du champ créé par différentes spires en un point

Dans le premier cas, représenté sur la figure 3 par la spire, on a :

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{l}{d + L/2 - N_1\varepsilon}\right) \text{ et } r = \frac{l}{\sin\theta_1} \quad (5)$$

et dans le second cas :

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{N_2\varepsilon - (d + L/2)}{l}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ et } r = \frac{l}{\sin\theta_2} \quad (6)$$

Ainsi, nous pouvons calculer le potentiel vecteur créé par le solénoïde de N spires en tout point $M \mid (r, \theta, z)$, en sommant les contributions de chaque spire, et en déduire les composantes du champ magnétique en M : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, d'où les composantes de B :

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\cos\gamma}{r \sin\theta} \left((\cos\theta)A_\varphi + (\sin\theta) \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} \right) \\ B_\theta &= -\frac{\cos\gamma}{r} \left(A_\varphi + r \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) \\ B_\varphi &= \frac{\sin\gamma}{r} \left(\left(A_\varphi + r \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) \sin\theta + (\sin\theta)A_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} \cos\theta \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Nous allons maintenant valider nos simulations numériques en les comparant à des résultats théoriques particuliers, puis nous confronterons les simulations avec les mesures effectuées au cours de l'expérience. Nous concluerons enfin sur la bonne façon, selon nous, d'interpréter l'effet Maxwell-Lodge.

5. Comparaison des simulations avec les prédictions théoriques

Une présentation plus complète des résultats qui suivent peut être consultée dans [30]. Comme nous pouvons le voir dans les équations définissant le potentiel vecteur (§1), le calcul du champ nécessite l'utilisation de méthodes d'intégration numériques. Une simple intégration par la méthode de Newton a été utilisée. Les résultats sont en très bon accord avec les expériences avec un pas spatial de 0.001. Seuls certains points nécessiteraient des méthodes informatiques plus complexes. En effet, l'axe z du solénoïde et les points se trouvant sur le bord du solénoïde sont des zones de divergence pour ces intégrales numériques.

Nous avons utilisé pour les expériences une bobine mesurant 75 cm, avec un rayon de 4.1 cm. Elle possède un enroulement de 341 spires dont le fil fait 2.2 mm de diamètre. On calcule alors sa résistance :

$$R = 375 \text{ m}\Omega \left(R = \frac{4 \varphi_{\text{solénoïde}}}{\sigma \varphi_{\text{spire}}^2} N \right)$$

où N est le nombre de spires du solénoïde et $1/\sigma$ la résistivité du cuivre qui vaut $1.588 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ et son inductance :

$$L = 1.08 \text{ mH} \left(L = \mu_0 n^2 \pi \left(\frac{\varphi_{\text{solénoïde}}}{2} \right)^2 l_{\text{solénoïde}} \right)$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur. On détermine aussi l'angle γ que fait une spire avec le plan (xOy) : $\gamma = 0.027$ radian. Le champ magnétique sur l'axe s'exprime selon [17] :

$$B(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \text{ où } \tan\alpha_1 = \frac{R}{d} \text{ et } \tan\left(\alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{L-d}{R},$$

n étant le nombre de spire par unité de longueur et I l'intensité traversant le solénoïde.

Des trois composantes de B , seule B_z est considérée ; B_r et B_θ sont très faibles ou n'interviennent pas (B_θ sera néanmoins évoquée au paragraphe 6).

5.1. Composante B_z en fonction de I

L'appareillage expérimental ne nous permettant pas de mesurer le champ au milieu du solénoïde mais seulement à 10 cm (vers l'intérieur) de son extrémité, nous avons donc choisi d'effectuer le calcul théorique en ce point M (fig. 4) pour une meilleure comparaison des valeurs expérimentales, théoriques et simulées.

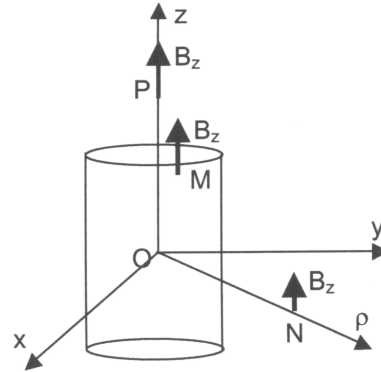


Figure 4 : Le solénoïde et B_z en $M | (1 \text{ cm}, 0, 27.5 \text{ cm})$, $N | (\rho, \theta, 0)$ sur l'axe ρ et $P | (0, 0, z)$ sur l'axe (Oz) .

Tableau 1 : Résultats théoriques donnant B_z en M , en fonction de I .

I (ampère)	1	1,5	2	2,5	3	3,5
B (gauss)	5,5	8,2	11	13,7	16,5	19,2
I (ampère)	4	4,5	5	5,5	6	6,5
B (gauss)	22	24,7	27,4	30,2	32,9	35,7
I (ampère)	7	7,5	8	8,5		
B (gauss)	38,4	41,2	43,9	46,7		

Les résultats suivants sont obtenus avec un pas de calcul de 0.001 et, pour des raisons liées à l'intégration numérique, on effectue les calculs à 1 cm de l'axe de symétrie.

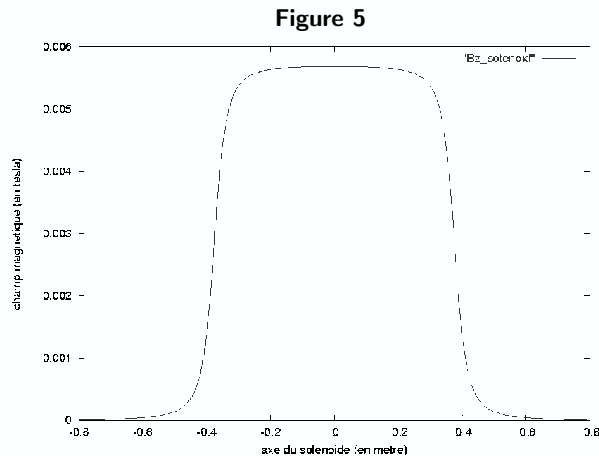
Tableau 2 : Résultats simulés donnant B_z en M , en fonction de I avec un pas de 0.001.

I (ampère)	1	1,5	2	2,5	3	3,5
B (gauss)	5,52	8,27	11,03	13,79	16,55	19,31
I (ampère)	4	4,5	5	5,5	6	6,5
B (gauss)	22,07	24,82	27,58	30,34	33,1	35,86
I (ampère)	7	7,5	8	8,5		
B (gauss)	38,61	41,37	44,13	48,89		

L'accord entre théorie et simulation est très bon.

5.2. Composante B_z en fonction de z

L'allure du graphe représentant le champ magnétique sur l'axe (Oz) est bien connue. Nous pouvons le vérifier sur la figure 5 ci-contre qui représente la composante B_z simulée du champ magnétique sur l'axe (Oz) du solénoïde (point P) pour un courant de 10 A. On a une nouvelle fois un accord parfait entre la théorie et la simulation.



5.3. Composante B_z sur le plan médian

Le champ magnétique vaut $\mu_0 n I$ à l'intérieur du solénoïde et est proche de zéro à l'extérieur. Ceci nous donne un nouveau test pour la simulation.

Comme $N = 454.6$ spires/m et que $I = 10$ A, $\mu_0 n I = 57$ gauss.

La simulation est en parfait accord avec la théorie. Un point semble cependant se distinguer, celui qui est proche de la spire à $\rho = 0.04$ m. Cette singularité est due à un problème d'intégration numérique. Il peut être intéressant de voir comment le champ magnétique décroît avec la distance en dehors du solénoïde (ce dont nous ne nous rendons compte sur la figure 6 à cause des faibles valeurs du champ magnétique à l'extérieur comparé aux valeurs à l'intérieur).

5.4. Potentiel vecteur sur le plan médian

Soit \mathbf{A}_{in} le potentiel vecteur à l'intérieur du solénoïde et \mathbf{A}_{ext} le potentiel vecteur à l'extérieur du solénoïde. On calcule, R étant le rayon du solénoïde :

$$\mathbf{A}_{\text{in}} = \frac{\mu_0 n I \rho}{2} \mathbf{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 n I R}{2} \left(\frac{R}{\rho} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (1)$$

En R , la valeur du potentiel vecteur est de 1.1 gauss.m pour un courant de 10 ampères. Nous retrouvons bien dans le graphique de la figure 7 (page suivante) une partie linéaire à l'intérieur du solénoïde et une partie décroissante en $1/\rho$ à l'extérieur. Là encore, il y a un parfait accord entre la théorie et la simulation.

6. Comparaison des simulations avec les résultats expérimentaux

Le champ a été mesuré à l'aide d'un gauss-mètre F.W. BELL (modèle 4048) et de deux sondes cal. n° 1760 pour des mesures axiales et cal. n° 1450 pour des mesures latérales. L'incertitude sur les valeurs mesurées est de 0.2 gauss, ce qui nous donne une incertitude relative importante lorsque l'on se place sur le plan médian, puisque les valeurs du champ sont de l'ordre du dixième de gauss. Il arrive que malgré l'incertitude nous indiquions qu'il y a un champ de 0.1 gauss, car en effet nous pouvons observer une légère variation entre les mesures avec et sans courant.

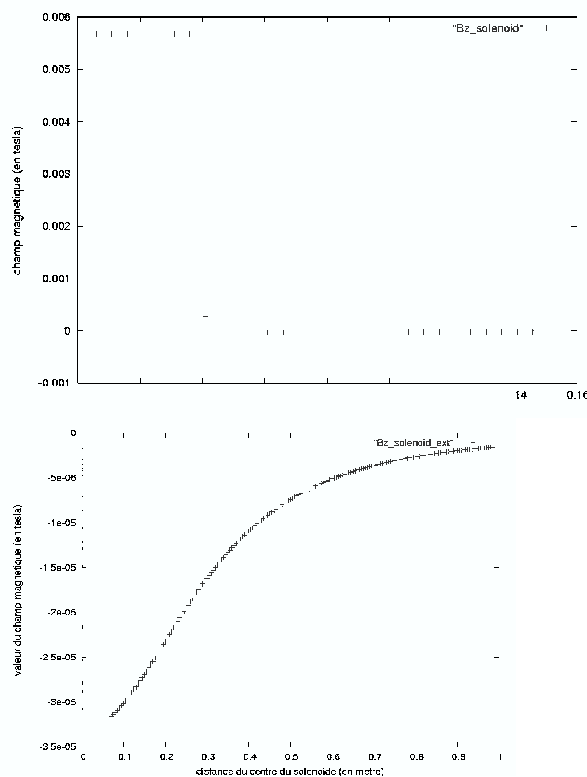


Figure 6 : Composante B_z du champ magnétique simulé sur le plan médian (point N) pour un courant de 10 A (en bas, détail $\times 200$ pour la région extérieure $\rho > 0.04$ m).

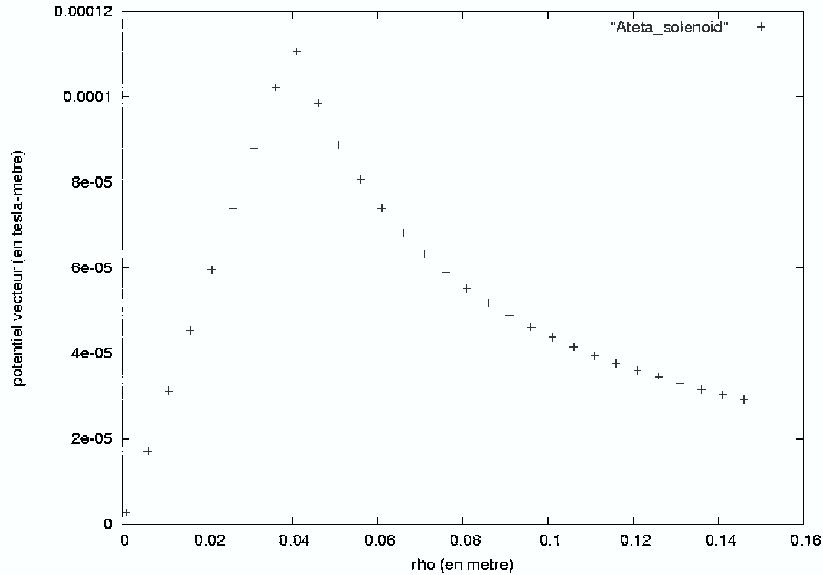


Figure 7 : Composante A_θ du potentiel vecteur simulé sur le plan médian (point N) pour un courant de 10 A.

6.1. Mesure du champ magnétique sur l'axe

On mesure le champ à 10 cm à l'intérieur du solénoïde (point M), comme précédemment dans le § 5.

I (ampère)	1	1,5	2	2,5	3	3,5
B (gauss)	5,5	8,2	10,8	13,4	16,2	18,9
I (ampère)	4	4,5	5	5,5	6	6,5
B (gauss)	21,7	24,4	27,1	29,8	32,4	35,3
I (ampère)	7	7,5	8	8,5		
B (gauss)	37,9	40,7	43,4	46,1		

Tableau 3 : Résultats expérimentaux donnant B_z en M .

Ces résultats se comparent favorablement à ceux du tableau 2.

6.2. Mesure du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde

Pour finir l'évaluation de la simulation, nous avons fait une série de mesures de B_z à l'extérieur du solénoïde. Cette évaluation est d'une importance capitale puisque le but de la simulation est de pouvoir prédire la valeur du champ magnétique extérieur en tout point. La précision du gauss-mètre est à sa limite pour certains points, mais elle permet d'avoir une allure du champ à l'extérieur (figure 8, page suivante).

Les valeurs de B_z simulé à l'extérieur sont données sur la figure 9 (page suivante) ; elles sont en bon accord avec les valeurs tirées de l'expérience (figure 8).

Les simulations sont donc d'une part en accord avec la théorie, d'autre part en accord avec l'expérience. Nous utiliserons donc dans la suite les résultats obtenus par simulation.

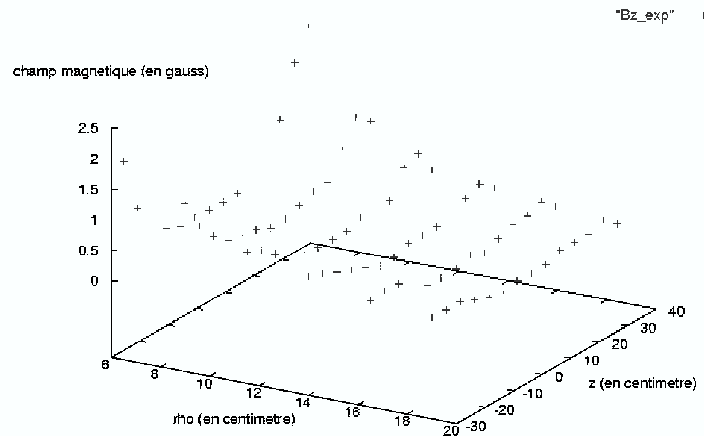


Figure 8 : Mesure de la composante B_z du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde pour un courant de 10 A.

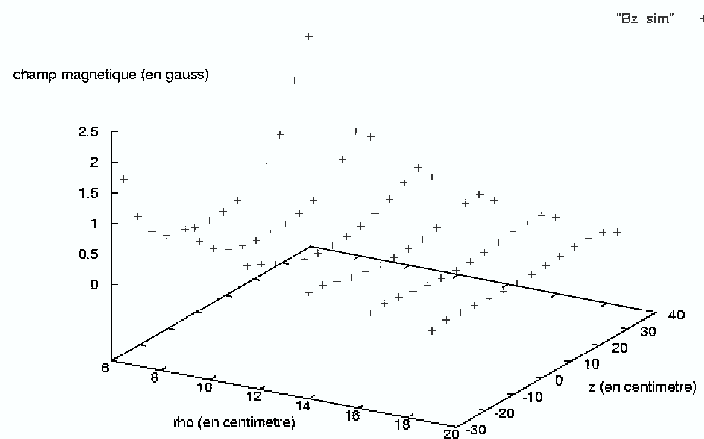


Figure 9 : Simulation de la composante B_z du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde pour un courant de 10 A.

Les spires étant inclinées, le potentiel vecteur possède, en plus d'une composante A_θ , une composante A_z . Ceci implique que le champ magnétique possède trois composantes comme nous pouvons le voir dans les équations (§ 1).

Ainsi, l'intérêt du modèle : « solénoïde = somme de spires inclinées » est qu'il tient compte, à l'extérieur du solénoïde, de la composante B_θ du champ magnétique trouvée expérimentalement.

Ces résultats montrent que le modèle « solénoïde = somme de spires inclinées » est donc un très bon modèle car il permet d'avoir la précision nécessaire pour la discussion que nous souhaitons avoir sur la réalité du potentiel vecteur.

Une visualisation frappante du module de \mathbf{B} à l'extérieur est donnée en exprimant le résultat des simulations en niveaux de gris (figure 10, page suivante).

6.3. F.e.m induite dans une boucle conductrice extérieure au solénoïde

Le champ magnétique sur le plan médian, là où nous placerons les spires pour mesurer la f.e.m induite, est inférieur à 1% de la valeur de B à l'intérieur du solénoïde. Le champ magnétique de fuite est-il pour autant négligeable dans le phénomène observé? Cela paraîtrait logique mais demande toutefois à être vérifié.

Le champ magnétique de fuite est dû à l'existence d'un potentiel vecteur de fuite puisque $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Ce potentiel vecteur de fuite, que nous noterons \mathbf{A}_f , peut être également déduit de la simulation. En effet :

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A}_{\text{simulé}} - \mathbf{A}_{\text{théorique}} \quad (2)$$

On en déduit le champ électrique de fuite à partir de $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$:

$$E_f = \omega A_f \quad (3)$$

On obtient ainsi la force électromotrice due aux fuites avec $e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$:

$$e_f = 2\pi\rho\omega A_f \quad (4)$$

On a par ailleurs la force électromotrice théorique :

$$e_{\text{th}} = 2\pi\rho\omega A_{\text{th}} \quad (5)$$

Soit, à l'aide de (1) :

$$e_{\text{th}} = \pi\omega\mu_0 n I R^2 \quad (6)$$

On remarque que la f.e.m théorique ne dépend pas de l'éloignement au solénoïde.

I (ampère)	f (Hz)	fem (mV)
1	1 601	30,3
1,01	1 500	28,7
1,01	1 400	26,8
1,01	1 300	24,9
1,01	1 200	23
1,01	1 099	21

Tableau 4 : Valeurs théoriques de la f.e.m induite

I (ampère)	f (Hz)	fem 1 (mV)	fem 2 (mV)	fem 3 (mV)	fem 4 (mV)	fem 5 (mV)
1	1 601	28 ± 3	28 ± 3	28 ± 3	27 ± 3	26 ± 3
1,01	1 500	26 ± 2	26 ± 4	25 ± 3	24 ± 2	24 ± 2
1,01	1 400	24 ± 2	24 ± 2	24 ± 2	24 ± 3	23 ± 3
1,01	1 300	23 ± 2	22 ± 2	23 ± 2	22 ± 2	22 ± 2
1,01	1 200	21 ± 2	21 ± 3	21 ± 2	20 ± 2	20 ± 2
1,01	1 099	19 ± 2	19 ± 2	18 ± 2	19 ± 2	18 ± 3

Tableau 5 : Valeurs expérimentales de la f.e.m induite

Les f.e.m 1,2,3,4 et 5 sont respectivement les f.e.m mesurées pour une spire de rayon 5 cm, 7.5 cm, 10 cm, 12.5 cm et 15 cm.

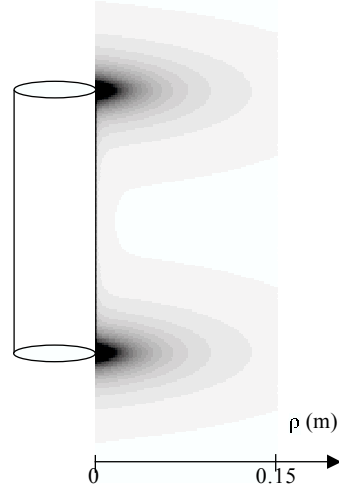


Figure 10 : Image en niveaux de gris du module du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde. B varie de 0.6 gauss à chaque saut de niveau de gris (le lobe noir est exagéré afin d'améliorer la visibilité pour B faible).

I (ampère)	f (Hz)	fem 1 (mV)	fem 2 (mV)	fem 3 (mV)	fem 4 (mV)	fem 5 (mV)
1	1 601	30,1	29,8	29,4	28,8	28,2
1,01	1 500	28,2	27,9	27,5	27	26,5
1,01	1 400	26,3	26	25,7	25,2	24,7
1,01	1 300	24,4	24,2	23,8	23,4	22,9
1,01	1 200	22,6	22,3	22	21,6	21,2
1,01	1 099	20,7	20,4	20,2	19,8	19,4

Tableau 6 : Valeurs simulées de la f.e.m induite

I (ampère)	f (Hz)	fem 1 (mV)	fem 2 (mV)	fem 3 (mV)	fem 4 (mV)	fem 5 (mV)
1	1 601	-0,2	-0,5	-1	-1,5	-2,1
1,01	1 500	-0,2	-0,5	-0,9	-1,4	-2
1,01	1 400	-0,2	-0,5	-0,8	-1,3	-1,8
1,01	1 300	-0,2	-0,4	-0,8	-1,2	-1,7
1,01	1 200	-0,2	-0,4	-0,7	-1,1	-1,6
1,01	1 099	-0,2	-0,4	-0,7	-1	-1,4

Tableau 7 : Valeurs simulées de la f.e.m de fuite induite

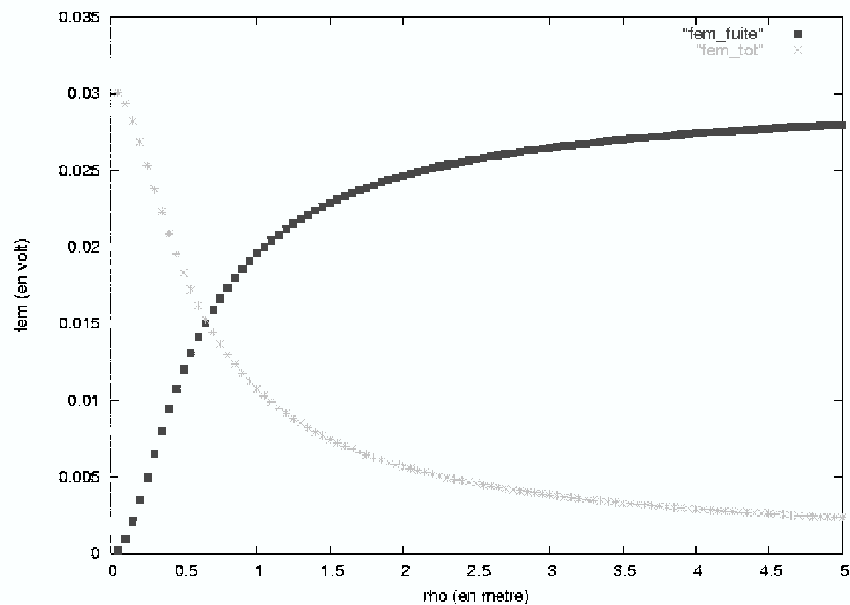


Figure 11 : Modules simulés de la f.e.m de fuite et f.e.m totale aux bornes d'une spire extérieure au solénoïde pour un courant sinusoïdal de 1 A à 1 600 Hz.

Ainsi, le champ magnétique de fuite joue très clairement un rôle dans l'effet M-L, mais il n'explique pas l'effet en lui-même (figure 11 ci-dessus). En effet, lorsque l'on est proche du solénoïde, le champ magnétique de fuite ne peut expliquer la f.e.m que l'on mesure sur la spire à l'extérieur du solénoïde. Au contraire, la f.e.m due aux fuites est en opposition de phase avec la f.e.m théorique. De cette manière la f.e.m totale diminue à mesure que la f.e.m de fuite augmente puisque la f.e.m théorique est constante sur le

plan médian. On a alors une décroissance de la f.e.m totale, à mesure que l'on s'éloigne du solénoïde. Aussi, il n'est pas étonnant de voir la f.e.m totale (c'est-à-dire celle que l'on mesure) diminuer quand le rayon de la spire augmente, car on a de plus en plus de champ parasite «rebouclant» dans cette surface et annulant peu à peu les effets du champ au cœur du solénoïde. Nous avons donc une explication locale au phénomène qui tend à diminuer la f.e.m induite dans une spire quand le rayon de celle-ci augmente. On pense parfois que la f.e.m que l'on mesure aux bornes de la spire extérieure est due au champ magnétique de fuite à cause de la taille non infinie du solénoïde, ou d'un effet de l'inclinaison des spires non prévu par la théorie, ou encore des deux en même temps.

Or ce n'est pas le cas. La taille finie du solénoïde intervient en faisant décroître la f.e.m avec l'éloignement et l'inclinaison des spires a pour effet de faire apparaître une composante B_θ du champ magnétique (qui n'intervient donc pas dans le calcul de la f.e.m) et de légèrement modifier la valeur de la composante B_z du champ magnétique à l'extérieur mais de manière négligeable.

7. Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une description locale complète de l'effet Maxwell-Lodge d'où il ressort que l'utilisation du potentiel vecteur est nécessaire pour interpréter cet effet. Dès lors, la notion de champ «réel» proposée par FEYNMAN [20] s'applique au potentiel vecteur qui passe du statut «d'outil mathématique» permettant le calcul des champs électrique et magnétique à celui de champ à part entière. Ainsi, la formulation de Riemann-Lorentz semble plus naturelle que la formulation d'Heaviside-Hertz puisqu'elle présuppose les équations de Riemann pour les potentiels comme équations fondamentales de l'électromagnétisme alors que la formulation de Heaviside-Hertz les considère comme équations secondaires. En conclusion, les faits expérimentaux imposent de reformuler l'électromagnétisme classique en fonction des potentiels en tant que quantités plus fondamentales que les champs qui en dérivent et non l'inverse.

Les auteurs

Germain ROUSSEAU est chercheur post-doctoral à l'université de Nice – Sophia Antipolis. Ses spécialités sont l'électromagnétisme, l'hydrodynamique et la culture scientifique.

Richard KOFMAN est professeur de Physique à l'université de Nice – Sophia Antipolis. Ses spécialités sont l'électromagnétisme, l'optique et les nanostructures.

Olivier MINAZZOLI est étudiant en Master de Physique à l'université de Nice – Sophia Antipolis.

Bibliographie

- [1] ROUSSEAU G. & GUYON E., A propos d'une analogie entre la mécanique des fluides et l'électromagnétisme, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 2002, 841, p. 107-136.
<http://www.udppc.asso.fr/bup/841/0841D107.pdf>.
- [2] ROUSSEAU G., On the Physical Meaning of the Gauge Conditions of Classical Electromagnetism : the Hydrodynamics Analogue Viewpoint, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 2003, 28, p. 261-270.
<http://www.ensmp.fr/aflb/AFLB-282/ablb282p261.htm>.

- [3] ROUSSEAU G. & DOMPS A., Remarques supplémentaires sur l'approximation des régimes quasi stationnaires en électromagnétisme, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 2004, 863.
<http://www.udppc.asso.fr/bup/863/08630621.pdf>.
- [4] ROUSSEAU G., Sur la théorie de Riemann-Lorenz de l'électromagnétisme classique, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 2004, 868, p. 41-46.
- [5] FLECKINGER R., CARLES R. & PEREZ J.P., Faut-il, en régime quasi stationnaire, « tuer » la différence de potentiel ?, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 1990, 722, p. 375-384.
- [6] FLECKINGER R., CARLES R. et PEREZ J.P., « Tensions » sur la différence de potentiel ?, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 1991, 732, p. 567-570.
- [7] BOUSSIÉ A., Quelle tension mesure un voltmètre en régime quasi statique ?, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 1992, 744, p. 757-770.
- [8] MAXWELL J. Clerk, A Treatise on Electricity and Magnetism, Volume I & II, Dover Publications, 1954.
- [9] LODGE O., On an Electrostatic Field Produced by Varying Magnetic Induction, *Phil. Mag.*, 1889, 27, p. 469-478.
- [10] ROMER R.H., What do "Voltmeters" Measure ? : Faraday Law in a Multiply Connected Region, *American Journal of Physics*, 1982, 50, p. 1089-1093.
- [11] LANZARA E. & ZANGARA R., Potential Difference Measurements in the Presence of a Varying Magnetic Field, *Physics Education*, 1995, 30, p. 85-89.
- [12] IENCINELLA D. & MATTEUCCI G., An Introduction to the Vector Potential, *European Journal of Physics*, 2004, 25, p. 249-256.
- [13] KONOPINSKI E.J., What the Electromagnetic Vector Potential Describes, *American Journal of Physics*, 1978, 46 (5), p. 499-502.
- [14] SEMON M.D. & TAYLOR J.R., Thoughts on the Magnetic Vector Potential, *American Journal of Physics*, 1996, 64 (11), p. 1361-1369.
- [15] GOUGH W. & RICHARDS J.P.G., Electromagnetic or Electromagnetic Induction ?, *European Journal of Physics*, 1986, 7, p. 195-197.
- [16] JECH B., Variations sur le potentiel vecteur IV, *Cahier Enseignement supérieur du Bulletin de l'Union des Physiciens*, 2001, 830 (2), p. 85-101.
- [17] JACHSON J.D., Classical Electrodynamics, third edition, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [18] ANDERSON R., On an Early Application of the Concept of Momentum to Electromagnetic Phenomena : The Whewell-Faraday Interchange, *Studies in the History and Philosophy of Science*, 1994, 25, p. 577-594.
- [19] TRAMMEL G.T., Aharonov-Bohm Paradox, *Physical Review*, 1964, 134, 5B, p. B1183-B1184.
- [20] FEYNMAN R., LEIGHTON R. & SANDES M., *The Feynman Lectures on Physics*, 1964, 2, p. 15-7/15-14, Addison Wesley, Reading, Ma.
- [21] EYNCK T.O., LYRE H. & RUMMELL N., A versus B! Topological Nonseparability and the Aharonov-Bohm Effect, 2001.
<http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00000404/00/Ab.pdf>.
- [22] TONOMURA A., *The Quantum World Unveiled by Electron Waves*, World Scientific, 1998.
- [23] ASPECT A. et al., Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem, *Physical Review Letters*, 1981, 47, p. 460.
- [24] GOODSTEIN D. & GOODSTEIN J., Richard Feynman and the History of Superconductivity, *Physics in Perspective*, 2000, 2, Issue 1, p. 30-47.
- [25] JAKLEVIC R.C., LAMBE J.J., SILVER A.H. & MERCEREAU J.E., Quantum Interference from a Static Vector Potential in a Field-free Region, *Physical Review Letters*, 1964, 12, Number 11, p. 274-275.

- [26] MAXWELL J. Clerk, On Physical Lines of Force (1861-2), W.D. Niven, ed., *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 1890, 2 vols., New York.
- [27] MAXWELL J. Clerk, On a Method of Making a Direct Comparison of Electrostatic with Electromagnetic Force ; with a Note on the Electromagnetic Theory of Light, W.D. Niven, ed., *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 1890, 2 vols., New York.
- [28] POYNTING J.H., On the Connection between Electric Current and the Electric and Magnetic Inductions in the Surrounding Field, *Phil. Trans.*, 1885, 176, p. 277-306.
- [29] ROCHE J., Explaining Electromagnetic Induction : a Critical Re-examination. The Clinical Value of History in Physics, *Physics Education*, 1987, 22, p. 91-99.
- [30] MINAZZOLI O., Champ magnétique et potentiel vecteur créés par un solénoïde, Rapport de stage effectué au LPMC (UMR 6622), juin-septembre 2004.
<http://mlilom.perso.libello.com> ou <http://www.inln.cnrs.fr/~rousseau/>.