Remarques supplémentaires sur l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme

par **Germain ROUSSEAUX**
Institut non-linéaire de Nice (INLN) - Sophia Antipolis
CNRS (UMR 6618) - 06560 Valbonne
Germain.Rousseaux@inln.cnrs.fr
http://www.inln.cnrs.fr/~rousseaux/
et **André DOMPS**
Lycée Louis Thuillier - 80000 Amiens
adomps@nordnet.fr

RÉSUMÉ

Cet article présente de nouvelles remarques sur l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme et sa fondamentale dualité. Il examine le comportement limite de la condition de jauge et de l'équation de conservation de la charge, en recourant d'une part à des analyses d'ordre de grandeur et d'autre part aux lois de transformation des champs par changement de référentiel galiléen. L'analogie avec les ondes mécaniques dans un milieu continu est également développée.

INTRODUCTION

Dans un article récent [1], l'un de nous signalait l'intérêt qu'il y a de considérer *deux* limites quasi-stationnaires de l'électromagnétisme au lieu d'une seule traditionnellement. Par une analyse d'ordre de grandeur, nous proposions de cette idée une présentation accessible aux élèves de classes préparatoires scientifiques.

Il est depuis apparu souhaitable de compléter cet article sur au moins deux aspects. D'une part, les limites quasi-stationnaires de deux équations importantes n'étaient pas abordées : équation de conservation de la charge et surtout condition de jauge pour les potentiels. Cela présente un intérêt particulier suite à plusieurs articles parus dans ce bulletin qui se sont attachés à revivifier l'enseignement des potentiels électromagnétiques et à illustrer leur signification [2, 3, 4]. Dans l'un d'entre eux [4], la dualité de la limite quasi-stationnaire était laissée en suspens.

D'autre part, cette question peut être abordée, à un niveau conceptuel supérieur, au travers des lois de transformation des champs par changement de référentiel galiléen [5, 6]. Ce point de vue plus moderne, difficilement transposable auprès d'étudiants ignorant de la relativité restreinte, est cependant très éclairant sur les frontières galiléennes de l'électromagnétisme auxquelles notre enseignement se frotte couramment. Il mérite sans doute d'être popularisé auprès des professeurs concernés.

Enfin, dans la lignée de la démarche de [4], nous présenterons une analogie mécanique du comportement d'un milieu « conducteur-diélectrique » dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

1. CONDITION DE JAUGE ET CONSERVATION DE LA CHARGE DANS LES LIMITES QUASI-STATIONNAIRES

1.1. Jauge de Lorenz et jauge de Coulomb

Les équations de Maxwell se résolvent commodément en introduisant les potentiels scalaire V et vecteur $\mathbf{A}$. On présente parfois ces objets comme de simples intermédiaires formels dénués de réalité physique. On peut au contraire leur attribuer une signification concrète [2, 3, 4], et même les interpréter comme des objets plus « fondamentaux » que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, suivant en cela l'idée originelle de MAXWELL [7] ou le formalisme des mécaniques lagrangienne et quantique. Nous n'entrerons pas ici dans cette discussion et nous renvoyons le lecteur aux articles parus récemment dans le bulletin ainsi qu'à la littérature anglophone [8, 9, 10, 11]. Mais quel que soit le point de vue adopté, l'utilisation des potentiels repose sur le choix d'une condition de jauge qui complète leur définition et permet leur calcul.

Dans le cas le plus général des phénomènes de rayonnement, la jauge de Lorentz est la plus appropriée :

$$\nabla.\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}=0. \qquad (1)$$

Ses mérites sont bien connus : elle rend les équation de propagation pour $\mathbf{A}$ et V symétriques et conduit aux solutions en potentiels retardés. D'autre part, elle semble la plus naturelle dans le formalisme relativiste où son caractère covariant est explicite.

La jauge de Coulomb $(\nabla.\mathbf{A}=0)$ est typique de la magnétostatique. D'évidence, elle correspond à une simplification de la jauge de Lorenz pour les phénomènes statiques $(\partial_t=0)$. Pour cette raison, on considère parfois qu'elle en constitue *la* limite quasi-stationnaire. Cependant, l'existence de *deux* limites quasi-stationnaires rend cette affirmation ambiguë. Nous nous proposons de la préciser.

Notons enfin que la jauge de Coulomb est parfois utilisée pour des régimes variables quelconques [12], ce qui n'est pas sans soulever certains problèmes de causalité, le potentiel scalaire se « propageant » alors instantanément ! Pour cette raison, nous exclurons l'utilisation de cette jauge pour les phénomènes rapidement variables et l'envisagerons uniquement comme limite quasi-stationnaire de la condition de Lorenz.

1.2. Analyse d'ordre de grandeur pour la jauge de Lorenz

Reprenons brièvement l'analyse menée dans [1]. Les quatre équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge peuvent être obtenues à partir des équations de propagations des potentiels avec sources sous la jauge de Lorenz qui sont covariantes relativistes. Dans une situation quasi-stationnaire[1] $(\varepsilon=L/c\tau\ll 1)$, les potentiels sont donnés par :

$$V(M,t)\simeq\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(P,t)}{PM}d\tau \quad \mathbf{A}(M,t)\simeq\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\mathbf{j}(P,t)}{PM}d\tau. \qquad (2)$$

[1] Comme dans [1], L et τ désignent respectivement les échelles de temps et de longueur. L'ordre de grandeur d'une quantité physique X est noté $\tilde{X}$.

On peut estimer leur ordre de grandeur par :

$$\tilde{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\tilde{j}\mathcal{V}}{L} \tag{3}$$

$$\tilde{V} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tilde{\rho}\mathcal{V}}{L} \tag{4}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume occupé par les sources du champ.

Comparons maintenant les différents termes intervenant dans la condition de jauge de Lorenz. Le terme $\nabla.\mathbf{A}$ met en jeu trois dérivées spatiales dont l'ordre de grandeur est :

$$\partial_{x_i} A_{x_i} \simeq \frac{A}{L} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\tilde{j}\mathcal{V}}{L^2}$$

où x_i désigne une coordonnées cartésiennes quelconque. Le second terme de la jauge s'estime par :

$$\frac{1}{c^2}\partial_t V \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\tilde{\rho}\mathcal{V}}{L\tau} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\tilde{\rho}\mathcal{V}}{L\tau}$$

Pour comparer entre eux ces deux termes, la condition de quasi-stationnarité $\varepsilon \ll 1$ liant les échelles de temps et de longueur ne suffit pas. Il faut aussi peser l'importance relative des charges et des courants. Comme dans [1], nous sommes amenés à utiliser le deuxième paramètre dans dimension $\xi = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c}$. Dès lors on a l'estimation :

$$\frac{\partial_{x_i} A_{xi}}{\frac{1}{c^2}\partial_t V} \simeq \frac{\xi}{\varepsilon}$$

Dans une situation quasi-stationnaire magnétique ($\varepsilon \ll 1$, $\xi \gg 1$), les dérivées partielles de $\mathbf{A}$ sont donc de deux ordres de grandeur supérieures au terme en $\frac{\partial V}{\partial t}$. À cet ordre dominant, la condition de jauge de Lorenz se réduit donc approximativement à celle de Coulomb :

$$\nabla.\mathbf{A} \simeq 0$$

et le potentiel vecteur s'identifie à chaque instant à celui de la magnétostatique.

Au contraire, lorsque $\xi \ll 1$, les différents termes de la jauge sont *a priori* du même ordre de grandeur. La jauge de Lorentz doit être conservée intacte dans la limite quasi-stationnaire électrique.

1.3. Conservation de la charge

La simplification de la jauge de Lorenz en celle de Coulomb est obtenue quand s'applique la limite quasi-stationnaire magnétique. Dans ce cas, le théorème d'Ampère de la magnétostatique s'applique [1] et s'écrit sous forme locale :

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}. \tag{5}$$

Il n'est compatible qu'avec des courants à flux conservatif, sans accumulation de charge : $\nabla.\mathbf{j} \simeq 0$. Cette propriété, souvent introduite comme caractérisant les courants « quasi-stationnaires », ne constitue qu'*une* limite quasi-stationnaire possible de l'équation de conservation de charge. La seule condition $\varepsilon \ll 1$ ne suffit pas à sa justification comme on le croit trop souvent.

Pour le voir explicitement, sans le détour alambiqué par le champ magnétique et l'équation de Maxwell-Ampère, on peut analyser l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de conservation de la charge

$$\nabla.\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \qquad (6)$$

On a :

$$\frac{\partial_{x_i} j_{x_i}}{\partial_t \rho} \simeq \frac{\tilde{j}/L}{\tilde{\rho}/\tau} = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c}\frac{c\tau}{L} = \frac{\xi}{\varepsilon}.$$

La comparaison est donc la même que celle effectuée pour la condition de jauge. Pour les régimes quasi-stationnaires magnétiques où $\xi \gg 1$ et $\varepsilon \ll 1$, on a à l'ordre dominant :

$$\nabla.\mathbf{j} \simeq 0.$$

Cette dernière équation est valide même dans le cas non stationnaire. On peut prendre comme exemple un générateur de tension sinusoïdale relié à une ampoule par un conducteur ohmique. On a bien conservation du courant le long du circuit et ce courant varie en fonction du temps.

Au contraire, dans une situation quasi-stationnaire électrique, $\varepsilon \ll 1$, $\xi \ll 1$, l'équation de conservation doit être maintenue sous la forme (6). Ce n'est pas surprenant si l'on se souvient que l'ARQS électrique trouve son domaine naturel d'application avec les condensateurs [1]. Les variations et accumulations de charge y sont traduites par $i = \frac{dq}{dt}$, variante intégrale de (6). Même à basse fréquence, il ne viendrait à l'idée de personne de simplifier cette équation en $i \simeq 0$, au motif que le phénomène est quasi-stationnaire !

2. L'ÉLECTROMAGNÉTISME QUASI-STATIONNAIRE AU TRAVERS DES CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

L'ARQS magnétique est d'une grande importance pratique pour l'étude des phénomènes d'induction à circuit fixe. En ce qui concerne l'induction dans les circuits mobiles, le cadre théorique sous-jacent est celui des transformations des champs par changement de référentiel galiléen. On sait cependant que ces deux aspects de l'induction représentent les points de vue de deux observateurs sur un seul et même phénomène, liés respectivement au circuit induit ou à un dispositif mobile créant **B** variable. D'autre part, la condition de quasi-stationnarité $\varepsilon = L/c\tau \ll 1$ peut être satisfaite en faisant « tendre c vers l'infini ». Analyser les limites quasi-stationnaires de l'électromagnétisme revient donc à s'interroger sur ses limites galiléennes (*i.e.* non relativistes) et sur les lois associées de transformation des champs. M. LE BELLAC et J.-M. LÉVY-LEBLOND ont donné de cette question une analyse limpide [5] qui a sans doute trop peu essaimé dans l'enseignement universitaire. Elle complète et clarifie, grâce à un point de vue alternatif, la présentation par analyse d'ordres de grandeur fournie dans [1] et le paragraphe 1. Nous tentons ici de la populariser en la replaçant dans le cadre familier de l'enseignement de l'électromagnétisme en CPGE (Classes préparatoires aux grandes écoles).

2.1. La transformation « galiléenne » des champs et ses incohérences

En partant de l'invariance de la force électromagnétique par changement de référentiel galiléen, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} \end{aligned} \tag{7}$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse d'entraînement d'un référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

D'autre part, les conceptions galiléennes d'invariance du temps et de l'espace par changement de référentiel impliquent que les sources du champ se transforment selon :

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho \\ \mathbf{j}' &= \mathbf{j} - \rho \mathbf{u} \end{aligned} \tag{8}$$

Il est bien connu que ces relations sont en contradiction avec les lois de l'électromagnétisme. On s'en convainc immédiatement en considérant le cas d'une charge ponctuelle en mouvement rectiligne uniforme. Dans son référentiel propre, elle crée un champ électrostatique mais pas de champ magnétique nul. Dans le référentiel du laboratoire, elle crée pourtant un champ magnétique non nul, en contradiction avec (7).

Les élèves de premier cycle ou de classes préparatoires étant plus familiers avec les champs créés par des répartitions continues de courant qu'avec ceux créés par des charges ponctuelles, on préfère souvent leur montrer en contre-exemple un ensemble de charges en mouvement rectiligne uniforme [13], typiquement un faisceau homocinétique cylindrique de particules chargées.

On obtient alors, dans le référentiel du laboratoire :

$$\mathbf{E} = \frac{Ir}{2\pi\varepsilon_0 a^2 u}\mathbf{u_r} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\mathbf{u}_{\boldsymbol{\theta}} \tag{9}$$

et dans le référentiel du faisceau :

$$\mathbf{E}' = \frac{Ir}{2\pi\varepsilon_0 a^2 u}\mathbf{u_r} \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{0} \tag{10}$$

I et a désignant respectivement l'intensité et le rayon du faisceau, u la vitesse des particules. Ces résultats sont évidemment incompatibles avec (7), mais satisfont la loi de transformation :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{E} \end{aligned} \tag{11}$$

2.2. La transformation relativiste des champs et ses limites non relativistes

À l'issue du paragraphe précédent, il est d'usage de rassurer les étudiants en leur signalant que les incohérences mises à jour son levées dans le cadre de la relativité restreinte. Pourtant, cette affirmation n'est qu'à moitié rassurante pour deux raisons :

- On conçoit la physique galiléenne comme la limite de la physique relativiste lorsque $u \ll c$. Pourtant, le contre-exemple du paragraphe précédent demeure lorsque $u/c \ll 1$.

- Dans l'étude de l'induction, on utilise parfois la transformation galiléenne de champs (7) pour appliquer la loi d'Ohm dans le référentiel galiléen tangent au mouvement du circuit. On feint alors d'oublier son caractère hasardeux.

Il est pourtant possible d'inscrire l'électromagnétisme dans un cadre galiléen cohérent, restriction dans certaines limites de la théorie relativiste. Ce passage à la limite quand $c \to \infty$ doit être mené avec précaution. Comme $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$, on peut l'obtenir de deux façons différentes :

- À μ_0 constant, lorsque $\varepsilon_0 \to 0$.
- À ε_0 constant, lorsque $\mu_0 \to 0$.

Dans l'un ou l'autre cas, on privilégie l'interaction magnétique ou l'interaction électrique. En conséquence, l'analyse des limites non relativistes de électromagnétisme impose une discussion sur le paramètre $\zeta = \frac{cB}{E}$ qui joue le même rôle que ξ dans les analyses d'ordre de grandeur proposées plus haut.

Rappelons les transformations relativistes des champs :

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\boldsymbol{\beta}.\mathbf{E})\boldsymbol{\beta} \tag{12}$$

$$c\mathbf{B}' = \gamma(c\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\boldsymbol{\beta}.c\mathbf{B})\boldsymbol{\beta} \tag{13}$$

Nous avons choisi d'exhiber le produit $c\mathbf{B}$ plutôt que le champ magnétique lui même dans le but de le comparer à $\mathbf{E}$, de même dimension. Cette comparaison s'avère cruciale dans la suite.

On obtient la limite non relativiste lorsque $\boldsymbol{\beta} \to 0$, $\gamma \to 1$:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B} \tag{14}$$

$$c\mathbf{B}' = c\mathrm{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \tag{15}$$

Malheureusement, ces lois de transformation ne correspondent à aucune des deux transformations (7) et (11) envisagées dans le paragraphe 1, mais à un curieux mélange des deux. Comme l'ont fait remarquer les auteurs de [5], elles sont en réalité incorrectes car omettent la discussion sur $\zeta = cB/E$. Plus fondamentalement, les transformations du type (15) présentent le grave défaut de ne pas constituer un sous-groupe de groupe de Poincarré-Lorentz, au sens où la succession de deux d'entre elles ne produit pas une transformation du même type. On doit donc les modifier encore en imposant une contrainte supplémentaire sur le champ électromagnétique.

- Transformation galiléenne électrique :
  Quand le champ électrique domine, c'est-à-dire $E \gg cB$ ou $\zeta \ll 1$, (15) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \\ c\mathbf{B}' &= c\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \end{aligned} \tag{16}$$

- Transformation galiléenne magnétique

  Inversement, quand le champ magnétique domine $cB \gg E$ ou $\zeta \gg 1$, (15) se simplifie en :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ c\mathbf{B}' &= c\mathbf{B} \end{aligned} \tag{17}$$

Dans ces deux transformations limites nous reconnaissons les résultats (11) et (7) choisis comme exemples (ou contre-exemples) introductifs dans la partie 1. Nous voyons donc que l'application exclusive de l'une ou l'autre n'a rien de fortuit mais correspond à deux limites galiléennes distinctes de l'électromagnétisme.

Dans l'exemple du faisceau homocinétique, nous avons dans le référentiel des charges $B' = 0$, de sorte que c'est la transformation galiléenne électrique qui s'applique. Dans le référentiel du laboratoire, comme $cB/E = u/c \ll 1$, la même conclusion prévaut pourvu bien sûr que les charges soient en mouvement non relativiste.

La transformation galiléenne magnétique s'applique quant à elle à l'étude de l'induction dans les circuits mobiles. Dans ces dispositifs, on plonge un circuit mobile dans un champ magnétique externe, en l'absence de tout champ électrique. Voila qui justifie l'utilisation de (7) dans le référentiel galiléen tangent et répond aux inquiétudes soulevées au début du § 2.2.

2.3. Lien avec l'ARQS

L'intérêt des relations de transformations (16) et (17) va au-delà de simples lois de transformations. Leur dualité correspond à la dualité de la limite quasi-stationnaire, le paramètre ζ jouant le rôle de ξ dans la présentation précédente.

Dans le cadre de la transformation galiléenne électrique, un champ magnétique mobile ne modifie pas le champ électrique dans le référentiel du laboratoire $(\mathbf{E}' = \mathbf{E})$. Pour un observateur lié à ce deuxième référentiel, cela signifie que les variations temporelles de $\mathbf{B}$ sont sans influence sur le champ électrique. Les équations de Maxwell s'appliquent donc sans le terme de Faraday en $\partial_t \mathbf{B}$. C'est le régime quasi-stationnaire électrique décrit dans [1]. Inversement, la transformation galiléenne magnétique $(\mathbf{B}' = \mathbf{B})$ correspond à un jeux d'équations de Maxwell d'où le courant de déplacement est absent, c'est-à-dire au régime quasi-stationnaire magnétique.

M. Le Bellac et J.-M. Lévy-Leblond signalent que ces jeux simplifiés d'équations de Maxwell sont covariants par transformation de Galilée, à condition d'appliquer aux champs la loi de transformation appropriée (16) ou (17). Cette discussion est reprise plus explicitement dans [6]. Sans entrer nous-mêmes dans les détails techniques, citons la conclusion qui s'impose : dans les deux classes de régimes quasi-stationnaires, l'électromagnétisme est parfaitement cohérent avec la physique galiléenne. D'un point de vue historique, l'introduction par Maxwell (1865) d'un deuxième terme en ∂_t dans ses équations (voir plus loin) les a inscrites d'emblée dans un cadre nécessitant le passage de la cinématique galiléenne à la cinématique relativiste (Einstein, 1905). Il est étonnant que le chemin inverse, particularisant l'électromagnétisme à des situations galiléennes, n'ait été effectué que beaucoup plus tard ([5] date de 1973). Il est vrai que pour des physiciens déjà munis de la physique relativiste, cette démarche ne présentait pas de nécessité objective et a pu apparaître comme une simple curiosité théorique.

Pour nous, enseignants contraints de faire cohabiter la physique galiléenne et l'électromagnétisme de Maxwell, elle constitue au contraire une clarification indispensable et insuffisamment connue. Dans le cadre précis de l'ARQS, elle rétablit la cohérence de ces théories et devrait rendre plus prudent sur des affirmations du type : « On ne peut faire coexister l'électromagnétisme et la physique galiléenne que dans le cadre relativiste ».

Nous pouvons réexaminer, avec ce point de vue, les comportements limites de la jauge de Lorenz décrits dans la partie 1. À partir de la transformation de Lorentz pour le quadrivecteur potentiel $[\mathbf{A}, V/c]$, on obtient les transformations galiléennes par $\beta = \dfrac{u}{c} \to 0$ et en distinguant selon que $cA \gg V$ ou $cA \ll V$. Les résultats s'écrivent :

$$\text{limite magnétique } \begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} \\ V' = V - \mathbf{u}.\mathbf{A} \end{cases} \tag{18}$$

et :

$$\text{limite électrique } \begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \dfrac{\mathbf{u}}{c}\dfrac{V}{c} \\ V' = V \end{cases} \tag{19}$$

Il est connu que la jauge de Lorenz est covariante sous les transformations relativistes. Dans une situation galiléenne décrite par (18) ou (19), la jauge limite appropriée doit de même rester inchangée par la transformation :

$$\begin{aligned} \nabla' &= \nabla \\ \partial_t &= \partial_t + \mathbf{u}.\nabla \end{aligned} \tag{20}$$

associée à un changement de référentiel en cinématique classique. On vérifie sans peine que dans la limite magnétique, c'est la jauge de Coulomb qui est covariante sous les transformations conjointes (18) et (20). Dans la limite électrique, c'est celle de Lorenz qui est inchangée par application de (19) et (20). Cela corrobore les conclusions du paragraphe 1. D'autre part, le même raisonnement[2] s'applique à la loi de conservation de la charge : $\nabla.\mathbf{j} = 0$ n'est covariant que dans la limite magnétique.

3. L'ARQS DANS LES CONDUCTEURS OHMIQUES ET LES DIÉLECTRIQUES

Les deux limites de J.-M. LÉVY-LEBLOND et M. LE BELLAC sont prises indépendamment du milieu (conducteur ou diélectrique) dans lequel se déroule les phénomènes électromagnétiques. H.A. HAUS et J.R. MELCHER font une présentation alternative de l'ARQS qui fait référence explicitement au milieu [15]. Plus précisément, ils font intervenir trois temps caractéristiques (voir plus loin pour la signification des paramètres) : $\tau_m = L^2/\eta$ le temps de diffusion du champ magnétique ; $\tau_e = \varepsilon_0/\sigma$ le temps de relaxation des charges et $\tau_{em} = L/c$ le temps de parcours d'une onde électromagnétique qui sont reliés entre eux par la relation $\tau_{em}^2 = \tau_e \tau_m$. Suivant l'ordre de grandeur relatif de ces trois temps soit on le néglige le courant de déplacement et l'on se retrouve dans le cadre de la limite magnétique dans un milieu soit on néglige le terme d'induction de Faraday et l'on se retrouve dans le cadre de la limite électrique. La présentation de l'ARQS de J.-M. L LÉVY-LEBLOND et M. LE BELLAC est de notre point de vue plus fondamentale que celle de H.A. HAUS et J.R. MELCHER car elle décrit non seulement les milieux mais aussi le vide autour de ces milieux. Cependant, la présentation de H.A. HAUS et J.R. MELCHER est plus

[2] Consulter l'appendice pour les transformations galiléennes des sources ρ, $\mathbf{j}$.

facile à appréhender et nous allons illustrer par des analogies mécaniques la démarche en termes de temps caractéristiques.

3.1. Le courant de déplacement selon Maxwell

L'ARQS dans un conducteur ohmique est souvent justifiée en négligeant le courant de déplacement par rapport au courant de conduction. Nous allons voir que ce comportement se rapproche de la réponse visqueuse d'un fluide viscoélastique. Cette analogie mécanique figure dans la présentation originelle de Maxwell [7] qui l'a utilisée pour mettre en regard le phénomène de polarisation dans un diélectrique et l'allongement élastique d'un solide sous traction : « Electric displacement is a kind of elastic yielding to the action of electromotive force ».

La loi d'Hooke appliquée à un ressort relie le déplacement x à la force appliquée F *via* la raideur k :

$$F = kx \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{k}F \tag{21}$$

Dans le domaine de l'élasticité linéaire, la contrainte de traction σ_T s'exprime en fonction du module élastique d'Young E et du taux de déformation γ, rapport entre la variation de longueur Δl et la longueur initiale l_0 :

$$\sigma_T = E\gamma = E\frac{\Delta l}{l_0} \tag{22}$$

La force de traction est le produit de la contrainte par la section sur laquelle elle s'exerce :

$$F = E\frac{\Delta l}{l_0}S \qquad \Delta l = \frac{l_0}{ES}F \tag{23}$$

Dans un milieu diélectrique, MAXWELL a postulé l'existence d'un « déplacement » électrique $\mathbf{P}$ des charges liées sous l'application d'une « force électrique » $\mathbf{E}$ *via* un coefficient « élastique électrique » plus connu aujourd'hui sous le nom de susceptibilité électrique χ :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \tag{24}$$

Dans une vision plus moderne, ce déplacement correspond, dans le cas simple de la polarisation électronique, à la déformation du nuage électronique. D'autres types de polarisation existent telles que la polarisation ionique ou celle d'orientation. Dans l'esprit de MAXWELL, un diélectrique se comporte donc comme un solide élastique. Par exemple, un solide en déformation élastique stocke l'énergie comme le fait un condensateur sous tension.

L'hypothèse fondamentale introduite par MAXWELL consiste à considérer le vide comme un diélectrique et donc à lui attribuer un « déplacement » généralisé fonction d'un coefficient « élastique » du vide, s'identifiant à sa permittivité ε_0 $(\chi = 1)$:

$$\mathbf{P}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{25}$$

Cette dernière notion conduit au fameux courant de déplacement du vide, analogue à celui associé au déplacement des charges liées dans un diélectrique, et qui permit à MAXWELL de trouver les équations de propagations des ondes électromagnétiques :

$$\mathbf{j}_{\mathbf{P}_0} = \frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{26}$$

3.2. Analogue mécanique de la propagation des potentiels

Nous allons préciser formellement l'analogie élastique de MAXWELL évoquée ci-dessus. Effectuons pour cela une décomposition de HELMHOLTZ du potentiel vecteur pour une onde électromagnétique :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{/\!/} + \mathbf{A}_{\perp} = \nabla g + \nabla \times \mathbf{R} \tag{27}$$

où g est un scalaire et $\mathbf{R}$ un vecteur.

Comme $\nabla \cdot \mathbf{A}_{\perp} = 0$ la condition de Lorenz ne met en jeu que la partie longitudinale de $\mathbf{A}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{/\!/} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{28}$$

Au contraire, il est facile de voir que les champs s'expriment seulement en fonction de $\mathbf{A}_{\perp}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{A}_{\perp} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}_{\perp} \end{aligned} \tag{29}$$

Pour $\mathbf{B}$, cela résulte simplement de $\nabla \times \mathbf{A}_{/\!/} = \nabla \times \nabla g = \mathbf{0}$. Pour $\mathbf{E}$, c'est une conséquence de la contrainte de Lorenz qui s'écrit en transformée de Fourier :

$$i\mathbf{k}.\tilde{\mathbf{A}}_{/\!/} + \frac{1}{c^2}(-i\omega\tilde{V}) = 0 \quad \text{soit} \quad \tilde{V} = \frac{c^2\mathbf{k}}{\omega}.\tilde{\mathbf{A}}_{/\!/} \tag{30}$$

Il est alors facile de voir que le terme en $-\partial_t \mathbf{A}_{/\!/}$ du champ électrique est compensé par le gradient du potentiel scalaire, la transformée de Fourier de $-\nabla V - \partial_t \mathbf{A}_{/\!/}$ étant :

$$-i\mathrm{k}\tilde{V} + i\omega\tilde{\mathbf{A}}_{/\!/} = \frac{i}{\omega}(-c^2k^2 + \omega^2)\tilde{\mathbf{A}}_{/\!/} = \mathbf{0} \tag{31}$$

grâce à la relation de dispersion de l'onde plane.

Dans le vide, les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday deviennent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}_{\perp}) = -\nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}_{\perp}}{\partial t}\right) \tag{32}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_{\perp}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}_{\perp}}{\partial t}\right) \tag{33}$$

Cette dernière est analogue à celle concernant la propagation d'une onde transverse en élasticité [16]. En effet, l'équation dite de Navier-Lamé décrit les déplacements **u** dans un solide sous déformations élastiques en fonction de la densité ρ_m du milieu et de deux modules élastiques de compression λ et de cisaillement G :

$$-(\lambda+G)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+G\nabla^2\mathbf{u}=\rho_m\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{34}$$

Si l'on ne considère que des mouvements transverses, alors on a :

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla\cdot\mathbf{u}_\perp=0 \tag{35}$$

et l'équation de Navier-Lamé se simplifie en :

$$G\nabla^2\mathbf{u}_\perp=\rho_m\frac{\partial^2\mathbf{u}_\perp}{\partial t^2} \tag{36}$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}_\perp)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{u}_\perp}{\partial t}\right) \tag{37}$$

qui est bien similaire à l'équation d'Ampère pour une onde lumineuse dans le vide. De même, on a de manière évidente :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{u}_\perp)=-\nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{u}_\perp}{\partial t}\right) \tag{38}$$

qui est l'analogue de l'équation de Faraday.

La célérité de l'onde s'exprime en fonction du module de cisaillement du milieu élastique G (l'inverse de la permittivité du vide) et de la densité de lignes de champ magnétique ρ_m (la perméabilité du vide) en utilisant $c=\sqrt{G/\rho_m}$. C'est cette analogie entre la propagation d'une onde élastique transverse et la propagation du champ électromagnétique que MAXWELL a explicitement utilisée pour pouvoir modifier l'équation d'Ampère [7]. Le fait d'ajouter « à la main » le courant de déplacement tout en gardant le terme en $\partial_t\mathbf{B}$ dans l'équation de Faraday inscrivit la théorie dans un cadre relativiste alors que la suppressions simultanée du terme de Faraday aurait permit de rester dans le cadre galiléen de la limite électrique. Il faut dire que MAXWELL cherchait avant tout à décrire la propagation d'ondes lumineuses transverses. De plus, MAXWELL a toujours utilisé la condition de jauge de Coulomb qui dans le cadre de son modèle mécanique trouvait un analogue avec la condition d'incompressibilité $(\nabla\cdot\mathbf{u}_\perp=0)$ qui n'autorisait que la propagation d'onde transverse élastique. Malheureusement, comme remarqué auparavant, cette condition de jauge n'est pas covariante relativiste et impose une propagation instant année du potentiel scalaire. Ce dernier fait ainsi que la difficulté des physiciens de la fin du XIX^e siècle à comprendre la signification physique des potentiels sur lesquels MAXWELL avait basé sa présentation de l'électromagnétisme conduisit O. HEAVISIDE et H. HERTZ à écrire les équations décrivant l'électromagnétisme uniquement en termes des champs et à considérer les potentiels, selon le mot de HERTZ, comme un « échafaudage »...

3.3. Analogue mécanique des régimes quasi-stationnaires

Nous venons d'interpréter en termes mécaniques la propagation des potentiels transverses. En ce qui concerne leur partie longitudinale, l'un d'entre nous (Germain

ROUSSEAUX) avec Étienne GUYON a montré qu'elle était analogue à la propagation d'une onde acoustique [4].

Nous avons également signalé qu'un conducteur ohmique dans la limite magnétique était analogue à un fluide newtonien en écoulement incompressible. En particulier, la viscosité cinématique ν est l'analogue de la diffusivité magnétique $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$ où σ est la conductivité électrique dont l'inverse est l'analogue de la viscosité dynamique $\mu = \rho_m \nu$ puisque la perméabilité μ_0 est l'analogue de la densité ρ_m.

Exemple : l'écoulement d'un fluide newtonien près d'un plan oscillant ([14], p. 204) est analogue à la pénétration d'un champ électromagnétique alternatif dans un conducteur ohmique ([17], p. 89).

On peut donc caractériser un fluide viscoélastique par un temps caractéristique de réponse $\tau = \mu/G$ qui est l'analogue du temps de réponse d'un milieu « conducteur-diélectrique ». En effet, le rapport entre l'ordre de grandeur du courant de déplacement et l'ordre de grandeur du courant de conduction en régime variable de période T est :

$$\frac{\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}}{\sigma \mathbf{E}} \simeq \frac{\varepsilon_0}{\sigma T} \simeq \frac{\tau_e}{T} \qquad (39)$$

où $\tau_e = \varepsilon_0/\sigma$ est un temps de relaxation caractéristique du milieu électrique qui correspond au temps d'expulsion des charges hors du milieu. En régime lentement variable, le milieu « conducteur-diélectrique » (milieu viscoélastique) se comporte comme un conducteur ohmique (fluide newtonien) alors qu'en régime rapidement variable celui-ci se comporte comme un diélectrique (solide élastique).

Exemple : l'écoulement d'un fluide viscoélastique près d'un plan oscillant ([14], p. 189 et 221) est analogue à la pénétration d'une onde lumineuse dans un milieu « conducteur-diélectrique » ([17], p.19 ; [18], chap. 7).

Ainsi, dans l'ARQS le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction dans un conducteur ohmique ce qui revient à se placer dans la limite magnétique de J.-M. LÉVY-LEBLOND et M. LE BELLAC (densité de charge nulle : $\rho = 0 \Rightarrow c\rho << j$). Précisons que dans le vide autour du conducteur ohmique, on pourrait naïvement en conclure que l'on est dans la limite électrique puisque le courant de conduction est nul. Or, l'équation d'Ampère dans le vide sans être dans l'ARQS s'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \qquad (40)$$

Nous avons vu que cette équation avait pour approximation dans la limite magnétique :

$$\nabla \times \mathbf{B} \simeq 0 \qquad (41)$$

alors qu'elle restait identique dans la limite électrique. On peut retrouver ces résultats en appliquant les transformations galiléennes des champs.

Terminons par quelques remarques concernant l'utilisation pratique des deux limites. Outre les conducteurs ohmiques, la limite magnétique s'applique en magnétohydrodynamique (liquide conducteur en mouvement) ainsi qu'en supraconductivité (la densité de courant y est proportionnel au potentiel vecteur : loi de London). De même, en plus des diélectriques comme les condensateurs où la conduction ohmique est négligeable voire absente et les phénomènes capacitifs prépondérants, la limite électrique s'applique en électrohydrodynamique (liquide diélectrique en mouvement) et aux électrolytes où les phénomènes de conduction électrique et de polarisation diélectrique sont présents simultanément.

CONCLUSION

On présente souvent l'électromagnétisme comme la théorie relativiste (einsteinienne) par excellence. Or, en conclusion de cet article, le lecteur s'étonnera qu'une large classe de phénomènes électromagnétiques, de nature quasi-stationnaire, reste du ressort d'une approche galiléenne. Sur le plan de l'histoire du développement des idées, il est tout à fait heureux qu'EINSTEIN ait vécu après NEWTON et MAXWELL et qu'il ait constaté l'incompatibilité entre la mécanique newtonienne et l'électromagnétisme maxwellien. On pourrait imaginer une civilisation sur une planète lointaine où se serait développé un électromagnétisme galiléen avec une mécanique relativiste ce qui obligerait les physiciens de ce monde imaginaire à généraliser l'électromagnétisme à la LÉVY-LEBLOND et LE BELLAC en un électromagnétisme relativiste et à particulariser une mécanique einsteinienne en une mécanique galiléenne. Fort heureusement pour nous, l'électromagnétisme galiléen n'a été découvert que tardivement, sans quoi il n'y aurait pas eu d'incompatibilité telle que celle soulevée par EINSTEIN et l'histoire de la physique aurait été différente...

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOMPS A. Remarques sur l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme. *Bull. Un. Phys.,* février 2003, vol. 97, n° 851 (2), p. 159-170.

[2] JECH B. Variations sur le potentiel vecteur I, II, III, IV, V et VI. *Bull. Un. Phys.,* juin 1999, vol. 93, n° 815 (2) : I (p. 163-190) et II (p. 191-206) ;
janvier 2001, vol. 95, n° 830 (2) : III (p. 67-83), IV (p. 85-101), V (p. 103-127) et VI (p. 129-140).

[3] JECH B. Éloge de l'analogie (réponse à Robert FLECKINGER), *Bull. Un. Phys.*, février 2002, vol. 96, n° 841 (2), p.103-105.

[4] ROUSSEAUX G. et GUYON E. À propos d'une analogie entre la mécanique des fluides et l'électromagnétisme. *Bull. Un. Phys.*, février 2002, vol. 96, n° 841 (2), p. 107-136.

[5] LE BELLAC M. et LEVY-LEBLOND J.-M. *Galilean Electromagnetism*. Il Nuevo Cimento 14B, N.2 (aprile), 1973.

[6] HOLLAND P.R. et BROWN H.R. The Non-Relativistic Limits of the Maxwell and Dirac Equations: The Role of Galilean and Gauge Invariance, to appear in Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 2002.
http://philsci-archive.pitt.edu/documents/disk0/00/00/09/99/index.html

[7] CLERK MAXWELL J. *On Physical Lines of Force* (1861-2) & *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (1865), W.D. Niven, ed., The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, 2 vols., tome 1, New York, 1890.

[8] KONOPINSKI E.J. What the electromagnetic vector potential describes. *American Journal of Physics*, 1978, 46 (5), p. 499-502.

[9] SEMON M.D. et TAYLOR J.R., Thoughts on the magnetic vector potential. *American Journal of Physics*, 1996, 64 (11), p. 1361-1369.

[10] TONOMURA A. *The Quantum World Unveiled by Electron Waves*. World Scientific, 1998.

[11] MEAD C. *Collective Electrodynamics : Quantum Foundations of Electromagnetism*. MIT Press, 2002.

[12] JACKSON J.D. *Classical Electrodynamics*. 2nd edition, John Wiley & Sons.

[13] GIE H. et SARMANT J.-P. Électromagnétisme 2, MP*, MP, PT*, PT. *Tec et Doc,* 85, 1996.

[14] GUYON E., HULIN J.-P. et PETIT L., *Hydrodynamique Physique*. 2e édition, Inter-Editions / CNRS Éditions, 2001.

[15] MELCHER J. R. & HAUS H. A. Electromagnetic fields and energy, Hypermedia Teaching Facility, M.I.T., 1998.
`http://web.mit.edu/6.013_book/www/`

[16] KARLSEN B.U., The Linear Theory of Elasticity compared with The Theory of Electrodynamics, 2002.
`http://home.online.no/ ukarlsen`

[17] *Électromagnétisme*, sous la direction de J.-M. BRÉBEC. 2de année PC-PC* / PSI-PSI*, Collection H-Prépa, Hachette Supérieure, 1998.

[18] *Ondes*, sous la direction de J.-M. BRÉBEC. 2de année PC-PC* / PSI-PSI*, Collection H-Prépa, Hachette Supérieure, 1997.

Germain ROUSSEAUX
Post-doctorant CNRS
Institut du Non-Linéaire de Nice
Valbonne (Alpes-Martitimes)

André DOMPS
Professeur
Lycée Louis Thuillier
Amiens (Somme)

Annexe

J.-M. LÉVY-LEBLOND et M. LE BELLAC ont montré que les transformations galiléennes du quadricourant ($\mathbf{j}$, ρc) diffèrent suivant la limite électrique ou magnétique. On obtient ces limites en partant de l'expression de la transformation relativiste d'un quadrivecteur quelconque (u, u_0) appliqué au quadricourant ($\mathbf{j}$, ρc) :

$$u_0 = \gamma\left(u_0 - \frac{\mathbf{v}.\mathbf{u}}{c}\right) \tag{42}$$

$$\mathbf{u}' = \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2}(\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{u} - \frac{\gamma \mathbf{v} u_0}{c} \tag{43}$$

avec $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2}$ où $\mathbf{v}$ est la vitesse relative entre deux référentiels inertiels [5, 6].

$$\text{limite électrique} \begin{cases} \rho' = \rho \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v} \end{cases} \tag{44}$$

$$\text{limite magnétique} \begin{cases} \rho' = \rho - \dfrac{\mathbf{v}.\mathrm{j}}{c^2} \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} \end{cases} \tag{45}$$

On en déduit l'ordre de grandeur du paramètre ξ :

$$\xi_e = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \simeq \frac{\tilde{\rho} v}{\tilde{\rho} c} \simeq \varepsilon << 1 \tag{46}$$

$$\xi_m = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \simeq \frac{\tilde{j}}{\frac{v\tilde{j}}{c^2} c} \simeq \frac{1}{\varepsilon} >> 1 \tag{47}$$

où nous avons utilise $v \simeq L/\tau$. En partant de la formulation en terme des potentiels, nous allons retrouver les deux jeux d'équations de Maxwell quasi-stationnaires correspondant à la limite magnétique d'une part et à la limite électrique d'autre part. Dans le cadre de l'ARQS, les potentiels sont chacun solutions d'une équation de Poisson :

$$\nabla^2 \mathbf{A} \simeq -\mu_0 \mathbf{j} \tag{48}$$

$$\nabla^2 V \simeq -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{49}$$

L'équation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ reste vraie dans le cadre galiléen quelle que soit la limite magnétique ou électrique donc $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

L'équation $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V$ peut se simplifier dans le cadre galiléen suivant l'ordre de grandeur de chacun des termes car comme on l'a vu les transformations galiléennes des potentiels diffèrent suivant la limite. Il nous faut évaluer l'ordre de grandeur du rapport entre ces deux termes en suivant la démarche de [1] :

$$\frac{\partial_t \mathbf{A}}{\nabla V} \simeq \frac{\frac{\tilde{A}}{\tau}}{\frac{\tilde{V}}{L}} \simeq \frac{L}{c\tau} \frac{c\tilde{A}}{\tilde{V}} \simeq \varepsilon \xi \tag{50}$$

$$\text{limite magnétique} \begin{cases} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V \\ \partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \end{cases} \tag{51}$$

$$\text{limite électrique} \begin{cases} \mathbf{E} \simeq -\nabla V \\ \nabla \times \mathbf{E} \simeq 0 \end{cases} \tag{52}$$

Retrouvons dans chacune des deux limites les équations locales faisant intervenir les sources, pour illustrer en quoi l'utilisation de la jauge appropriée s'avère crucial. On rappelle que quel que soit $\mathbf{A}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Limite magnétique :

$$\nabla^2 \mathbf{A} \simeq -\mu_0 \mathbf{j} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{j} \tag{53}$$

$$\nabla^2 V \simeq -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} \simeq \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{54}$$

Limite électrique :

$$\nabla^2 \mathbf{A} \simeq -\mu_0 \mathbf{j} \quad ; \quad \nabla . \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E} \simeq -\nabla V \quad \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 V \simeq -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} \simeq -\nabla V \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} \simeq \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{55}$$