

À propos d'une analogie entre la mécanique des fluides et l'électromagnétisme

par **Germain ROUSSEAU** et **Étienne GUYON**
LPMMH / ESPCI
CNRS (UMR 7636)
10, rue Vauquelin - 75231 Paris Cedex 05
germain@pmmh.espci.fr

*« It seems to me that the test of
"Do we or do we not understand a particular point in physics ?"
is, "Can we make a mechanical model of it ?" ».*

Lord Kelvin

RÉSUMÉ

À partir des équations hydrodynamiques écrites sous une forme « maxwellienne », nous proposons en retour de donner un sens hydrodynamique aux équations de MAXWELL à partir de cette analogie. En particulier, nous suggérons une signification physique aux potentiels pour des choix de jauges appropriés. Plusieurs exemples physiques de cette analogie sont présentés : la magnétohydrodynamique, les phénomènes d'induction, les superfluides chargés ou non chargés et enfin l'effet AHARONOV-BOHM à l'origine d'une reconsidération physique de la notion de potentiel vecteur. Nous concluons par une visite historique du modèle mécanique de MAXWELL qui a été à la base de l'écriture des équations de l'électromagnétisme...

1. INTRODUCTION

1.1. Préambule

Si la place de la mécanique des fluides (plus généralement de la mécanique des milieux continus) reste malheureusement très modeste dans l'enseignement des lycées, celle de la vorticité et des effets de la rotation sur les écoulements est très limitée   l'intérieur même des ouvrages classiques de mécanique des fluides au niveau des classes préparatoires et de l'université. C'est pour remédier   cet état de fait et pour rendre justice   l'importance fondamentale et pratique de ces effets que le livre « Hydrodynamique physique » écrit par J.-P. HULIN, L. PETIT et l'un d'entre nous (E.G.) leur a accordé une place considérablement accrue dans sa dernière édition [1, Chap. 7]. Des remarques faites par le premier auteur du présent article (G.R.) sur les analogies des écoulements fluides et l'électromagnétisme que décrit ce livre nous ont conduit   préparer   deux un article pour le Bulletin de l'Union des Physiciens.

En consultant les numéros très récents, nous avons découvert la remarquable série d'articles « Variations sur le potentiel vecteur » par Bruno JECH dont la qualité tient autant   la mise au point historique qu'au plaidoyer très savamment argument  en faveur de la réhabilitation du potentiel vecteur (plus généralement du quadrivecteur potentiel) en  lectromagn tisme [2]. Nous avons retrouvé dans sa présentation scientifique nombre des éléments que nous avons préparés dans la version que nous envisagions de soumettre

au BUP. Cette nouvelle rédaction prend donc en compte cette série d'articles publiée indépendamment et antérieurement à notre propre contribution, en dégagant les aspects nouveaux et complémentaires. En particulier, elle s'attachera à développer la présentation hydrodynamique (équation de la vortacité) dans une comparaison avec l'électromagnétisme, introduira les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) qui établit une correspondance entre les notions de viscosité et de résistance électrique. Enfin, un prolongement du plaidoyer de B. JECH s'attachera à montrer la nature physique, plus que simplement formelle, du potentiel vecteur.

1.2. Analogie et métaphore

La première partie de cet article s'appliquera à dégager une correspondance formelle entre les équations de l'électromagnétisme et celles de la mécanique des fluides exprimées à l'aide du concept de vortacité. C'est bien là l'essence même de la correspondance analogique qui établit un rapport (*αναλογία*) permettant de ramener un problème à l'autre. MAXWELL en donnait la définition suivante : « A physical analogy is that partial similarity between the laws of one science and those of another which makes each of them illustrate the other ».

À l'intérieur même d'un domaine physique - la mécanique des fluides en est riche - le rapport analogique par le jeu des nombres sans dimension permet de mettre en correspondance rigoureuse des problèmes à différentes échelles à l'aide d'équations réduites sans que l'on ne connaisse nécessairement leurs solutions. Nous garderons néanmoins dans cette note la forme paramétrée qui permet de faire sentir le sens des préfacteurs physiques dans l'une et l'autre classe de problèmes.

À côté de ces analogies, il existe des correspondances imagées - métaphoriques - lesquelles furent longuement utilisées par les inventeurs de l'électromagnétisme qui ont recherché dans des modèles mécaniques l'inspiration pour l'établissement des lois de l'électromagnétisme, comme le montre excellemment le travail de B. JECH dans sa première « variation » [2].

2. LES ÉQUATIONS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE L'HYDRODYNAMIQUE

Note : on représentera le produit vectoriel par le signe \times , la dérivée partielle par rapport au temps par

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, l'opérateur gradient par le signe Nabla ∇ , l'opérateur divergence par $\nabla \cdot$, l'opérateur rotationnel

par $\nabla \times$ et l'opérateur Laplacien par ∇^2 . On utilise la notion de dérivée totale (ou dérivée particulière) :

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$$

2.1. Rappels d'électromagnétisme

Les équations de Maxwell « électromagnétiques » s'écrivent [3] :

Équation de Thomson $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ou $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (1)

Équation de Faraday $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ ou $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V$ (2)

Équation de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q_E}{\epsilon_0}$ (3)

$$\text{Équation d'Ampère} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_E + \frac{1}{c_L^2} \partial_t \mathbf{E} \quad (4)$$

où $c_L = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

Les équations pour les potentiels, qui découlent des équations précédentes, sont :

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{q_E}{\epsilon_0} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j}_E \quad (6)$$

Les potentiels vecteur et scalaire, de la forme :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda + \mathbf{A}_0 \quad (7)$$

$$V' = V - \partial_t \Lambda + V_0 \quad (8)$$

sont aussi solutions des équations de Maxwell et laissent invariants les champs électrique et magnétique. \mathbf{A}_0 et V_0 sont constants et « fixent les origines » des potentiels (*cf.* plus loin). $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ est appelée la fonction de jauge. Cette « indétermination » des potentiels vecteur et scalaire est à l'origine des choix de jauge. On dit que les équations de Maxwell sont « invariantes de jauge » par ces transformations **simultanées** des potentiels [3-4].

2.2. Rappels de mécanique des fluides

Nous nous intéressons à l'écoulement incompressible à la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ d'un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν constantes. La contrainte d'incompressibilité valable pour les écoulements dont la vitesse est très inférieure à la célérité du son dans le milieu s'exprime par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (9)$$

L'équation de Navier-Stokes incompressible décrit le mouvement d'une « particule » fluide de dimension mésoscopique en tant que collection de molécules [1, Chap. 4] :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \equiv \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (10)$$

où p est la fonction de l'espace et du temps qui s'identifie à la pression thermodynamique à l'équilibre. Le membre de gauche correspond à la dérivée totale (c'est-à-dire prise en suivant le mouvement) d'une variable eulérienne (champ de vitesse fonction locale de l'espace et du temps).

La décomposition ci-dessous introduite par LAMB permet de réécrire le terme d'advection en fonction de la vorticité $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$ à l'aide de l'identité :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \equiv \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$$

Le terme de viscosité peut être transformé à l'aide d'une seconde identité vectorielle, en utilisant la contrainte d'incompressibilité :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla^2 \mathbf{u}$$

La relation fondamentale de la dynamique se met ainsi sous la forme équivalente, dite forme de Lamb :

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \times \mathbf{w} \quad (11)$$

où $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w}/2$ est le vecteur tourbillon qui est analogue à la vitesse angulaire de rotation solide en mécanique du point.

On peut donner l'interprétation suivante à cette dernière équation : une particule fluide de masse unité est plongée dans une « mer » énergétique à la fois d'origine potentielle (terme de pression) et cinétique (terme centrifuge) ; elle est soumise à la force de Coriolis dans son référentiel propre ainsi qu'aux frottements visqueux.

On obtient l'équation qui décrit la dynamique de la vorticité en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes sous sa forme classique :

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \partial_t \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{w} \quad (12)$$

Le nom de Helmholtz est justement attaché à cette équation comme le souligne le travail d'Olivier DARRIGOL sur l'œuvre de Helmholtz en mécanique des fluides [5]. Celui-ci ne connaissait pas les travaux antérieurs sur la viscosité auquel sont attachés les noms de NAVIER et de STOKES : c'est par dérivation à partir de l'équation d'Euler (qui est l'équation de Navier-Stokes sans le terme de viscosité) que Helmholtz a établi l'équation de la vorticité pour la première fois en 1858.

On reconnaît un terme d'advection de la vorticité $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}$. Le second terme $(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ traduit la déformation des tubes de vorticité par étirement et rotation, ce qui permet en particulier l'amplification de la vorticité dans les écoulements tridimensionnels lorsque celle-ci n'est pas identiquement nulle initialement (tourbillon de baignoire) [1, Chap. 7]. Enfin, le dernier terme $\nu \nabla^2 \mathbf{w}$ permet de définir la viscosité cinématique comme un coefficient de diffusion (d'amortissement de la vorticité) plus justement que celui pour la vitesse où il convient de tenir compte en plus des gradients de pression [1, Chap. 7].

2.3. Le vecteur de Lamb

Le vecteur, dit de Lamb, $\mathbf{l} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ représente l'accélération de Coriolis d'un champ de vitesse sous l'effet de sa propre rotation (habituellement, la force de Coriolis est construite avec un vecteur rotation indépendant du vecteur vitesse). Par exemple, pour un tourbillon dont la vorticité est axiale et la vitesse orthoradiale, le vecteur de Lamb est radial. Il faut comprendre que la pseudo-force de Coriolis que modélise le vecteur de Lamb est telle que la vitesse crée un vecteur rotation qui rétroagit sur l'écoulement.

Une approche énergétique permet de comprendre que le pseudo-travail mécanique du vecteur de Lamb multiplié par la densité volumique (la pseudo-force de Coriolis) n'est autre que l'énergie cinétique de l'écoulement :

$$E_c = \iiint \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} dV = \iiint \rho \mathbf{l} \cdot \mathbf{x} dV$$

Le lecteur averti pourrait faire remarquer que la force de Coriolis ne travaille pas en mécanique classique : le vecteur \mathbf{x} repère chaque particule fluide par rapport à une origine donnée et il n'est pas nécessairement parallèle à la vitesse (d'où le terme de pseudo-travail) et donc pas perpendiculaire au vecteur de Lamb.

Ce résultat est analogue au bilan énergétique en électromagnétisme où seul le champ électrique « travaille » et pas le champ magnétique (cf. plus loin). Un électron en mouvement verra sa trajectoire se dévier à vitesse constante lorsqu'il se déplace dans une induction magnétique perpendiculaire au plan du déplacement.

Note : on a utilisé l'identité vectorielle suivante :

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{x} \right] + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \equiv \mathbf{l} \cdot \mathbf{x}$$

Le terme en divergence donne une contribution surfacique qui s'annule à l'infini si la vitesse fait de même.

3. LES ANALOGIES ENTRE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET L'HYDRODYNAMIQUE

3.1. L'analogie de Marmanis

H. MARMANIS a développé récemment dans son travail de thèse une analogie entre, d'une part, la vorticité et le champ magnétique et, d'autre part, la vitesse et le potentiel vecteur [6] :

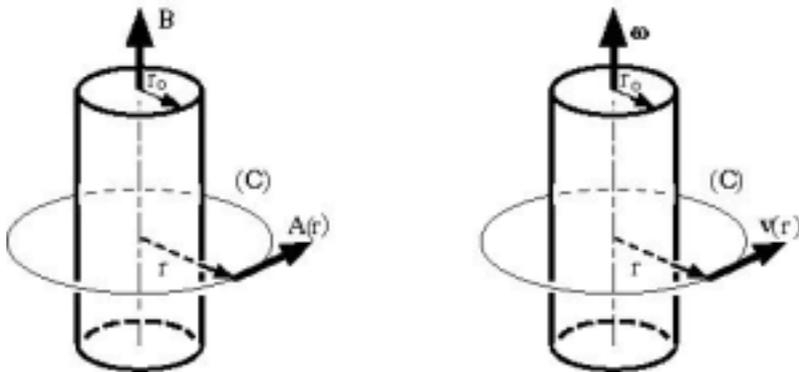


Figure 1 : L'analogie de MARMANIS.

Sous l'hypothèse d'incompressibilité, H. MARMANIS a proposé des équations de Maxwell « hydrodynamiques » de la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ ou } \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{13}$$

$$\partial_t \mathbf{w} = -\nabla \times \mathbf{l} - \nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{w} \text{ ou } \mathbf{l} = -\partial_t \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) - \nu \nabla \times \mathbf{w} \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{l} \equiv q_H = -\nabla^2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \tag{15}$$

où q_H est la « densité de charges » hydrodynamiques.

La première équation est évidente. Elle traduit la conservation du flux du champ de vorticité le long d'un tube de vorticité. De plus, elle implique l'absence de sources monopolaires de vorticité : un tube de vorticité se referme sur lui-même, s'en va à l'infini ou se connecte aux parois.

On trouve la deuxième et la troisième équations en appliquant respectivement les opérateurs rotationnel et divergence à l'équation de Navier-Stokes écrite sous la forme de Lamb (11). La deuxième équation illustre que la variation temporelle de vitesse angulaire est égale au couple exercé par la force de Coriolis. La troisième équation montre que les sources du vecteur de Lamb sont les gradients de pression et de vitesse.

Notons que B. JECH fait aussi correspondre la mécanique des milieux continus et l'électromagnétisme en rapprochant dans sa deuxième « variation » la densité de force électromagnétique s'exerçant sur une distribution de charges électriques avec la densité de la résultante dynamique d'un milieu continu [2].

Note : Plusieurs auteurs ont considéré récemment des analogies qui se rapprochent beaucoup de celle de H. MARMANIS. S. SHRIDAR compare le transport turbulent d'un scalaire passif à la diffusion d'une particule chargée dans un champ électromagnétique construit à partir du vecteur vitesse [7]. R.K. BHADHURI & L. SHUXI ont discuté de l'analogie entre la vitesse et le potentiel vecteur dans le cadre de la mécanique quantique à deux dimensions où des excitations collectives, nommées anyons, sont décrites en termes de particules chargées porteuses de flux magnétiques (des tourbillons bidimensionnels en quelque sorte) [8]. Ces pseudo-particules décrivent l'effet Hall quantique entier et fractionnaire (cf. l'excellent article de L. SAMINADAYAR dans le numéro de novembre 2001 de Pour La Science - p. 30-37).

On peut dresser un tableau qui résume l'analogie due à H. MARMANIS [6]. Chaque grandeur électromagnétique est mise en correspondance avec une grandeur hydrodynamique dont les significations sont précisées dans cet article :

Grandeurs hydrodynamiques	Grandeurs électromagnétiques
Enthalpie massique $\frac{p}{\rho}$	Potentiel Scalaire V
Vitesse \mathbf{u} (Impulsion hydrodynamique)	Potentiel Vecteur \mathbf{A} (Vecteur électronique, impulsion électromagnétique)
Vorticité \mathbf{w}	Induction Magnétique \mathbf{B} (Vorticité magnétique)
Vecteur de Lamb \mathbf{l} (Accélération de Coriolis)	Champ électrique \mathbf{E} (Vecteur de Coriolis, champ de Hall)
Champ hydromoteur $-\partial_t \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$	Champ électromoteur $-\partial_t \mathbf{A} - \nabla V$

3.2. Les changements de référentiel

Soit deux référentiels R et R' en mouvement l'un par rapport à l'autre. Les formules classiques (non-relativistes) de changement de référentiel (non nécessairement galiléen) sont [3-9] :

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{u}$$

On introduit le champ électrique dans le référentiel en mouvement (\mathbf{E}') qui est différent du champ électrique associé au référentiel en mouvement (\mathbf{E}_C) :

$$\mathbf{E}_C = \mathbf{B} \times \mathbf{u}$$

où \mathbf{u} représente ici une vitesse d'entraînement. Ce dernier champ est l'analogie du terme d'accélération de Coriolis ou d'un champ de Hall.

Dans un changement de référentiel galiléen (R' est en translation uniforme par rapport à R à la vitesse constante \mathbf{u}_0), on rappelle que les dérivées spatiales et temporelles se transforment suivant :

$$\begin{aligned} \nabla &= \nabla' \\ \partial_t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla &= \partial_{t'} \end{aligned}$$

Le vecteur vorticité et le vecteur de Lamb se transforment alors selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' &= \mathbf{w} \\ \mathbf{l}' &= \mathbf{l} - \mathbf{w} \times \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

Ainsi, on définit en mécanique une vitesse constante de référence qui est d'une certaine manière l'analogie de \mathbf{A}_0 (exemple : le potentiel vecteur dû au champ magnétique terrestre est constant pendant une expérience de laboratoire et n'ajoute rien aux phénomènes observés sauf si l'on est perdu en forêt et que l'on dispose d'une boussole...).

3.3. Interprétation de la charge

La charge « hydrodynamique » peut être qualifiée de topologique. En effet, elle peut s'interpréter comme l'opposée de la courbure de l'énergie (dérivée spatiale seconde) [6] :

$$q_H(\mathbf{x}, t) = -\nabla^2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$$

On remarque qu'elle est nulle pour un écoulement irrotationnel ($\mathbf{w} \equiv \mathbf{0}$ donc $\mathbf{l} \equiv \mathbf{0}$) et qu'elle est indépendante de la viscosité du fluide.

La pression est analogue à un potentiel électrique : une différence de potentiel met en mouvement un électron comme une différence de pression met un fluide en mouvement. La pression de référence p_0 correspond au potentiel scalaire de référence V_0 .

Existe-t-il une structure topologique localisée associée à la charge ?

- ♦ En électromagnétisme, les structures sont les électrons, les protons et toutes les particules ou molécules chargées.

- ♦ En hydrodynamique, il existe des structures géométriques qui correspondent aux filaments de vorticité, aux tourbillons et d'une manière générale aux structures dites cohérentes : un vortex est caractérisé par une dépression et son cœur correspond à un minimum local de vitesse. La notion de « critère Q » a été introduite récemment pour caractériser la turbulence principalement dans les simulations numériques : elle consiste à calculer le Laplacien de la pression seule pour visualiser les structures cohérentes. Le calcul de la charge est donc une sorte de critère Q amélioré.

On peut effectuer une décomposition, dite de Helmholtz, du vecteur de Lamb [10] :

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_H + \mathbf{l}_L = \nabla \alpha + \nabla \times \beta \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot \beta = 0$$

Les indices // et \perp correspondent aux projections du vecteur de Lamb parallèlement et perpendiculairement au vecteur d'onde dans l'espace de Fourier associé. On trouve alors que la charge est uniquement fonction de $\mathbf{l}_{//}$ et que le scalaire α est complètement déterminé sous la contrainte d'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \mathbf{l} = \nabla \cdot \mathbf{l}_{//} = -\nabla^2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nabla^2 \alpha = q_H \quad \text{où} \quad \alpha = -\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$$

Remarquons que l'équation de Navier-Stokes se transforme alors en deux équations :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{//} &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \\ \mathbf{l}_{\perp} &= -\partial_t \mathbf{u} - \nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \end{aligned}$$

De même, en électromagnétisme, on peut décomposer le champ électrique sous la jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}, t) = -\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) = q_E(\mathbf{r}, t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}_{//} = -\nabla V$$

On retrouve l'équation de l'électrostatique écrite pour une distribution de charges éventuellement instationnaire. Dans le cas simple d'une distribution de charges ponctuelles q_i aux points \mathbf{r}_i , sa solution est :

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Le champ électrique longitudinal à l'instant t est le champ de Coulomb instantané associé à la charge électrique et est calculé comme si la distribution de charges était statique et figée à sa valeur prise à l'instant t . Ainsi, $\mathbf{E}_{//}$ ($\mathbf{l}_{//}$) est une fonction explicite de la position des particules (tourbillons). Ce n'est pas une variable dynamique autonome, son évolution étant complètement asservie à la dynamique des particules (tourbillons).

Cependant, à cause de la non-linéarité, la charge hydrodynamique est plus complexe qu'une charge électrique. En effet, on a vu que le vecteur de Lamb d'un tourbillon cylindrique est radial tout comme le champ électrique associé à un fil chargé. C'est pourquoi un tourbillon est un objet « électromagnétique » dual car c'est un tube de flux magnétique porteur de charge électrique [7].

Remarque sur la décomposition du vecteur de Lamb :

Cette décomposition n'est, en général, pas unique car on peut simultanément soustraire à $\mathbf{l}_{//}$ ($\mathbf{E}_{//}$) et additionner à \mathbf{l}_{\perp} (\mathbf{E}_{\perp}) le gradient d'une fonction quelconque qui est solution d'une équation de Laplace. Cette indétermination est semblable à l'invariance de jauge. Les conditions limites sont essentielles pour garantir ou non l'unicité...

Dans le cas particulier d'un écoulement stationnaire où les effets visqueux sont négligeables, l'équation de Navier-Stokes se résume à « l'équilibre autostrophique » (on utilise la notion de géostrophisme en météorologie en faisant référence à l'équilibre entre la force de Coriolis terrestre et le gradient de pression [1, Chap. 7.5]) :

$$\mathbf{l} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{l}_{//} = \nabla \alpha$$

Le vecteur de Lamb est perpendiculaire aux surfaces isoénergétiques ($\alpha = \text{cste}$) et chacune de ces surfaces contient les lignes de courant et les lignes tourbillonnaires :

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0$$

La composante transverse du vecteur de Lamb est donc nulle. Cette propriété est très importante en turbulence bidimensionnelle (cascade énergétique inverse des petites aux grandes échelles de l'écoulement). En effet, en turbulence tridimensionnelle, c'est la composante transverse qui est à l'origine de la cascade énergétique directe des grandes vers les petites échelles de l'écoulement. On montre que la composante longitudinale est passive : son évolution est complètement pilotée par la composante perpendiculaire. D'une manière générale, la composante transverse est fortement réduite dans les régions de l'espace où la vorticité est concentrée [10].

3.4. Retour sur l'analogie de Helmholtz

Considérons un champ de vorticité généralisée **T** associée   un vecteur **S** sol noidal ($\mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{S}$ et $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$). Le champ **S** se calcule   partir de **T** en utilisant la relation de BIOT & SAVART [1, 3 et 9] :

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{T}(\mathbf{x}', t) \times \mathbf{r}}{r^3} dV(\mathbf{x}') \quad (16)$$

avec :

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$$

Cette équation peut être appliquée aux trois couples de vecteurs suivants :

T	S
w	u
B	A
$\mu_0 \mathbf{j}$	B

Reprenons la distinction introduite par MAXWELL entre ce qu'il appelait les grandeurs linéaires et les grandeurs rotatoires [11]. Dans un langage plus moderne, cette distinction correspond   celle entre les vecteurs polaires et les vecteurs axiaux. On peut classer la vitesse, le potentiel vecteur et la densité de courant dans la première catégorie alors que la vorticité et l'induction magnétique appartiennent   la seconde.

La vorticité a pour mesure le Hertz : elle s'interprète comme la fréquence de changement d'orientation d'une particule fluide ( quivalent au spin en mécanique quantique) et pas comme une simple rotation d'ensemble. En effet, il existe des écoulements irrotationnels où les particules tournent sans changer d'orientation comme c'est le cas dans le champ de vitesse en dehors du cœur d'un tourbillon. Les vorticim tres (ou strophom tres) utilisent un motif imprimé ou introduit dans l'écoulement dont on mesure la fréquence de rotation, ce qui donne une mesure directe de la vorticité.

On retrouve ce caractère rotatoire lorsque l'on considère l'induction magnétique. Un électron animé d'une vitesse verra sa trajectoire se courber s'il est soumis   ce champ (effet Coriolis/Hall [3]). De même, un rayon lumineux dont le vecteur d'onde est parallèle   une induction qu'on applique   certains matériaux magnétiques verra sa polarisation tourner d'un angle proportionnel   l'intensité du champ (effet Faraday [3-11]). Au contraire, l'électrolyse illustre le fait que les ions se dirigent linéairement vers l'électrode négative et inversement les électrons vers l'électrode positive. La vitesse est aussi une grandeur linéaire : le plus court chemin entre deux points est bien la ligne droite !

On pourrait penser que cette distinction entre grandeurs linéaires et rotatoires n'est pas adaptée   l'exemple du sol noide. En effet, on a l'impression que le courant tourne et que l'induction magnétique est dirigée linéairement dans l'axe des spires. Cependant, il faut comprendre que le courant s'écoule linéairement dans un circuit qui tourne de par sa géométrie.

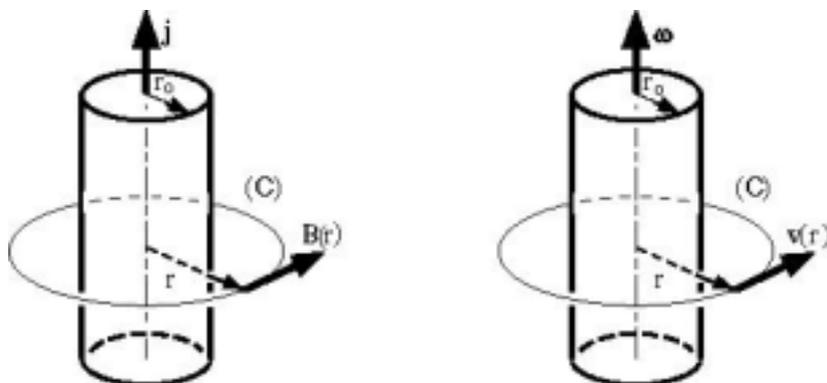


Figure 2 : L'analogie de HELMHOLTZ.

Dans l'analogie de HELMHOLTZ [1-5], la vitesse (respectivement la vorticité) est considérée comme l'analogue de l'induction magnétique (respectivement la densité de courant). Cette analogie conduit bien à l'écriture d'une équation de BIOT & SAVART qui permet de calculer la distribution des courants hydrodynamiques à partir de celle de la vorticité. Cependant, bien que dans les deux cas une quantité soit le rotationnel d'une autre, cette analogie ne tient pas lors d'un renversement des axes (r en $-r$). En effet, les vecteurs axiaux sont invariants par cette transformation alors que les vecteurs polaires se changent en leur opposé. Ainsi, il est clair que, mathématiquement, la vorticité/vitesse ne peut être analogue qu'à l'induction magnétique/potentiel vecteur du fait de cette loi de transformation.

L'analogie de HELMHOLTZ se révèle dangereuse quant à une interprétation physique. Elle permet néanmoins de visualiser les champs de manière simplifiée sur le plan pédagogique : « la vitesse tourne autour de la vorticité comme l'induction magnétique autour d'un courant électrique ».

4. QUELQUES EXEMPLES DE L'ANALOGIE

Illustrons l'analogie de MARMANIS par les exemples suivants :

4.1. La magnétohydrodynamique (MHD)

Note : La MHD étant habituellement enseignée au niveau d'un troisième cycle, le lecteur non aguerri pourra passer cette partie en première lecture. Le lecteur courageux découvrira l'analogie structurelle des équations de la MHD avec celles de l'électromagnétisme et de l'hydrodynamique.

Les deux premières équations de Maxwell « hydrodynamiques » sont analogues aux équations de la magnétohydrodynamique qui régissent l'évolution de l'induction magnétique \mathbf{B} dans un liquide conducteur non magnétique en écoulement [9-12] :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) - \eta \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$$

où $\eta = 1/(\sigma\mu)$ est la diffusivité magnétique fonction de la conductivité électrique σ et de la perméabilité magnétique μ du liquide. On obtient la deuxième en prenant le rotationnel de

l'équation d'Ampère sous l'approximation des régimes quasi-stationnaires, où l'on a injecté l'équation d'Ohm généralisée dans le référentiel en mouvement :

$$\mathbf{j}_E = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \sigma(\mathbf{E} - \mathbf{E}_C) = \sigma \mathbf{E}'$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_E$$

Ainsi, l'équation de l'induction magnétique devient :

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}_C - \eta \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \quad (17)$$

Le terme visqueux de l'équation de la vortacité $-\nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{w}$ est mis en correspondance avec le terme de diffusion magnétique. Le lecteur attentif remarquera l'absence d'un terme analogue en électromagnétisme [13-14]...

Sous la jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, le potentiel vecteur en magnétohydrodynamique est donné par l'équation suivante :

$$\partial_t \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = -\nabla V + \eta \nabla^2 \mathbf{A} \quad (18)$$

On remarque l'analogie avec l'équation de Navier-Stokes, écrite sous la forme de Lamb (11), en faisant correspondre la vitesse au potentiel vecteur.

De même, l'équation du potentiel vecteur en électromagnétisme correspond à la définition du champ électromoteur :

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V$$

qui, dans le cas des conducteurs ohmiques sous la jauge de Coulomb, devient :

$$\partial_t \mathbf{A} = -\nabla V + \eta \nabla^2 \mathbf{A} \quad (19)$$

Note : On peut toujours ajouter à V un terme « massique » en \mathbf{A}^2 analogue à l'accélération centrifuge et qui ne modifierait pas l'équation de Faraday. Cependant, ce terme est non-linéaire en \mathbf{A} alors que les équations de Maxwell décrivent des phénomènes linéaires. Un tel terme serait possible mathématiquement, mais c'est l'expérience qui invalide sa pertinence. En hydrodynamique, la non-linéarité se traduit par la non-invariance de la charge dans un changement de référentiel galiléen. De plus, une deuxième conséquence très importante est que les équations de Maxwell hydrodynamiques ne sont pas invariantes de jauge. Enfin, une autre source de non-linéarité provient du vecteur de Lamb qui est aussi une forme quadratique de la vitesse.

4.2. Les phénomènes d'induction

La grande nouveauté de l'analogie proposée par MARMANIS réside dans le rôle explicitement alloué au potentiel vecteur. Celui-ci s'interprète comme une quantité de mouvement électromagnétique, ce qui rappelle l'expression de l'impulsion généralisée d'une particule chargée en mouvement dans un potentiel vecteur [3] :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$$

On voit bien sur cet exemple que la particule est soumise à l'influence d'un potentiel vecteur non nul et pas simplement à l'induction magnétique qui, elle, peut être nulle (cf. la discussion sur l'effet Aharonov-Bohm). Cette interprétation du potentiel est quasi-inexistante dans l'enseignement actuel de l'électromagnétisme alors que FARADAY en avait deviné la signification physique en l'appelant le vecteur électrotonique. MAXWELL en donnait l'explication pittoresque suivante : « le vecteur électrotonique correspond à l'impulsion qui agirait sur l'axe d'une roue d'une machine si la roue était mise en mouvement soudainement en partant du repos ».

Pour une discussion plus détaillée de ce concept dans une perspective historique, nous renvoyons le lecteur à la première « variation » de B. JECH [2] ainsi qu'à la deuxième « variation » traitant de l'effet Zeeman où l'auteur identifie le potentiel vecteur à la quantité de mouvement d'entraînement associée au référentiel de Larmor...

La dérivée par rapport au temps du vecteur électrotonique (champ de Neumann) intervient dans les phénomènes d'induction tels que les exprime la loi de Faraday [3]. La circulation du champ électrique s'écrit (pour simplifier, ici C est un circuit électrique rigide et mobile à la vitesse constante V_C) :

$$\begin{aligned} e_{E.M.} &= \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\mathbf{E} - \mathbf{E}_C^T) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times (\mathbf{v} + \mathbf{V}_C)) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \oint_C (-\partial_t \mathbf{A} - \nabla V + (\mathbf{v} + \mathbf{V}_C) \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{E}_{mi} \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\oint_C (\partial_t \mathbf{A} + \mathbf{B} \times \mathbf{V}_C + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_C)) \cdot d\mathbf{s} = -\oint_C (\partial_t \mathbf{A} + (\mathbf{V}_C \cdot \nabla) \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\oint_C \frac{D_C \mathbf{A}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \left(\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = -\frac{d\phi_{E.M.}}{dt} \end{aligned}$$

où $\mathbf{v} // d\mathbf{s}$ est la vitesse des porteurs de charge par rapport au circuit C en mouvement, $\mathbf{E}_L = \mathbf{V}_C \times \mathbf{B}$ est le champ de Lorenz et $\mathbf{E}_{mi} = -\partial_t \mathbf{A} + \mathbf{V}_C \times \mathbf{B}$ est le champ électromoteur d'induction.

Il existe en hydrodynamique une loi équivalente lorsque l'on néglige la dissipation, qui n'est autre que le théorème de Thomson de 1869 [1, Chap. 7]. Ici $C = C(t)$ est un contour mobile fermé qui se déplace avec le fluide. On définit la circulation de la vitesse sur ce contour par la relation $\Gamma_H = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$, qui est un cas particulier d'une « variable action » en mécanique classique [15]. La variation de la circulation sur un tel circuit fermé est nulle ainsi que le rappelle schématiquement la démonstration suivante (ϕ_H représente le flux du champ de vorticit   à travers le circuit fermé) :

$$\frac{d\phi_H}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iint_S \mathbf{w} \cdot d\mathbf{S} \right) = \frac{d\Gamma_H}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \right) = \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{s}}{Dt} = 0$$

où l'on a utilisé : $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)$ et $\frac{Dd\mathbf{s}}{Dt} = (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

ce que l'on peut ré  crire :

$$0 = \frac{d\Gamma_H}{dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{l}) \cdot d\mathbf{s} = -e_H.$$

Cette loi de conservation permet de d  crire tr  s physiquement la dynamique d'une ligne ou d'un anneau tourbillon plac   dans un   coulement [1, Chap. 7]. Remarquons, en outre, que ce th  or  me est un cas particulier du principe de moindre action de MAUPERTUIS en m  canique classique [15].

Si on ne néglige pas la dissipation, le théorème de Thomson devient :

$$e_H = -\frac{d}{dt} \left(\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \right) = -\oint_C (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{l}) \cdot d\mathbf{s} = v \oint_C \nabla \times \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} \quad (20)$$

De même, en magnétohydrodynamique on a le théorème d'Alfvén [9] :

$$e_{M.H.D.} = -\frac{d}{dt} \left(\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) = -\oint_C (\partial_t \mathbf{A} + \mathbf{E}_C) \cdot d\mathbf{s} = \eta \oint_C \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (21)$$

qui est analogue à la loi d'Ohm globale $e_{E.M.} = RI$. En effet, si l'on injecte la loi d'Ohm locale généralisée ($\mathbf{j} = \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$) dans la définition de la circulation, on obtient dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires :

$$e_{E.M.} = -\frac{d}{dt} \left(\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) = -\oint_C (\partial_t \mathbf{A} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \oint_C \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (22)$$

ce qui permet d'avoir accès à la forme de la résistance électrique $R = L/(\sigma S)$ d'un circuit filiforme de conductivité σ , de longueur L et de section S parcouru par une intensité $I = jS$.

Note : ces trois théorèmes ne sont que l'application à différentes grandeurs physiques de l'identité vectorielle suivante, valable pour un contour mobile et déformable :

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_C \mathbf{R} \cdot d\mathbf{s} \right) = \oint_C [\partial_t \mathbf{R} + (\nabla \times \mathbf{R}) \times \mathbf{v}_C] \cdot d\mathbf{s}$$

où \mathbf{R} est un vecteur solénoïdal et \mathbf{v}_C est la vitesse locale instantanée d'un point du contour C .

5. LES JAUGES

Les potentiels vecteur et scalaire sont habituellement considérés comme indéterminés. Afin de lever cette ambiguïté, on doit faire le choix d'une jauge ce qu'on justifie habituellement par une simplification des calculs dans telle ou telle jauge [3]. Nous allons réexaminer ceci grâce à l'analogie.

5.1. La fonction de jauge

Nous avons pu donner un sens aux potentiels constants et c'est pourquoi nous allons réexaminer le rôle de la fonction de jauge $\Lambda(\mathbf{x}, t)$.

Dans le cadre de l'analogie, celle-ci s'interprète comme le « potentiel des vitesses » $\varphi(\mathbf{x}, t)$ [1] ou bien encore comme l'« action » de la mécanique classique [15]. En effet, dans le cas où le champ électromagnétique est nul ($\partial_t \mathbf{A} + \nabla V = 0$ et $\nabla \times \mathbf{A} = 0$) et sous le choix de jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), le problème électromagnétique est équivalent à l'écoulement incompressible et irrotationnel d'un fluide à la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$:

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \text{ ou } \mathbf{u} = \nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ ou } \nabla^2 \varphi = 0$$

Il faut résoudre l'équation de Laplace dans les deux cas. De plus, on montre facilement, à partir de l'équation de Navier-Stokes, que le potentiel des vitesses vérifie la relation de

Bernoulli (qui peut être vue comme un cas particulier de l'équation de Hamilton-Jacobi de la mécanique classique [15]) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} = f(t)$$

où $f(t)$ est uniforme dans tout le fluide et ne dépend que du temps. On peut éliminer cette fonction en introduisant $F(t)$, une primitive de $f(t)$, et un nouveau potentiel $\varphi'(x,t) = \varphi(x,t) - F(t)$:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi'|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (23)$$

Ainsi, en l'absence de champ électromagnétique et sous la jauge de Coulomb, la fonction de jauge est solution de l'équation de Laplace et est reliée au potentiel scalaire par l'analogie de la relation de Bernoulli :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + V = g(t) \quad (24)$$

où $g(t)$ est uniforme dans tout le milieu et ne dépend que du temps.

Un écoulement irrotationnel est impossible ($\mathbf{u}=0$ partout car $\varphi = cste$) dans un domaine simplement connexe de l'espace tel que la vitesse normale du fluide s'annule sur les parois du domaine ou à l'infini (cf. Rappels et [1-16]). En extrapolant pour l'électromagnétisme, on peut affirmer que, s'il existe une région de l'espace simplement connexe délimitée par des surfaces telles que la composante normale du potentiel vecteur est nulle ou une région non bornée où le potentiel vecteur s'annule à l'infini (loin des courants...) et que celui-ci est irrotationnel et à divergence nulle, alors la fonction de jauge est constante et le potentiel vecteur est nul dans tout le domaine : il n'est donc pas indéterminé au sens où l'on pourrait y ajouter le gradient d'une fonction quelconque.

Rappels de topologie :

Une courbe fermée est dite réductible dans un domaine donné lorsqu'on peut la ramener à un point par une déformation continue sans sortir du domaine sinon elle est dite irréductible. Un domaine dans lequel toutes les courbes fermées sont réductibles est dit simplement connexe sinon il est dit simplement connexe.

Le potentiel des vitesses φ en un point \mathbf{x} quelconque est donné par :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}_0, t) + \int_L \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{s}$$

où L est une ligne arbitraire joignant un point de référence \mathbf{x}_0 à \mathbf{x} .

Dans un domaine simplement connexe, le potentiel des vitesses prend une valeur unique en chaque point indépendamment de chemin choisi. Dans un domaine simplement connexe de l'espace, le potentiel est multiforme : sa valeur en chaque point est défini modulo la circulation autour d'une courbe irréductible. Cependant, dans les deux types de domaine, le champ de vitesse est défini d'une manière unique en tout point de l'écoulement par $\mathbf{u} = \nabla \varphi$. Par exemple, le champ de vitesse induit par un filament de vorticités rectiligne de longueur infinie est :

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma_H}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta$$

Le potentiel des vitesses associé est multiforme et est donné par :

$$\varphi = \frac{\Gamma_H \theta}{2\pi} + n\Gamma_H.$$

où n est le nombre de boucles autour du filament.

Le caractère irrotationnel d'un écoulement n'implique donc pas nécessairement que la circulation $\Gamma_H = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$ soit nulle le long de toute courbe fermée C (cf. l'effet Aharonov-Bohm).

5.2. Les choix de jauge

FARADAY et MAXWELL avaient perçu la signification physique du potentiel vecteur en tant qu'impulsion électromagnétique [11]. MAXWELL a toujours utilisé la jauge de Coulomb sans réellement la justifier. Cependant, dans le cadre du modèle mécanique de 1861 basé sur l'existence de « vortex moléculaires » qui lui permit d'échafauder ses équations, on peut raisonnablement penser que l'idée « d'incompressibilité » de l'écoulement du potentiel vecteur était sous-jacente (cf. plus loin...).

Pour une présentation historique de la genèse du potentiel vecteur, on pourra consulter la première « variation » sur le potentiel vecteur de B. JECH [2].

La jauge de Coulomb permet d'exprimer le potentiel scalaire à un instant donné en fonction de la répartition des charges au même instant (caractère instantané) [3-4] :

$$\nabla^2 V = -\frac{q_E}{\epsilon_0} \quad \text{Équation de Poisson}$$

qui a pour solution :

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{q_E(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x} \quad (25)$$

On dit alors que le potentiel scalaire se propage instantanément. En hydrodynamique et sous la contrainte d'incompressibilité, c'est la pression qui se propage instantanément.

Le potentiel vecteur est solution de l'équation de propagation inhomogène avec source de courant et couplage au potentiel scalaire :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_E + \frac{1}{c_L^2} \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Dans les phénomènes d'interaction rayonnement-matière, on choisit habituellement la jauge de Coulomb en évoquant le fait que la vitesse des atomes soumis à un rayonnement est petite devant la vitesse des ondes lumineuses. Ce choix est analogue à la contrainte d'incompressibilité car, dans ce cas, c'est la vitesse du fluide qui est négligeable devant celle des ondes acoustiques (approximation des faibles nombres de Mach $M = v/c_s$).

LORENZ fût le premier en 1867 à remettre en cause la jauge de Coulomb en proposant la jauge (maladroitement attribuée à Lorentz dont le travail est postérieur de vingt-cinq ans [4]) qui transforme les équations pour les potentiels en équations de propagation d'ondes découplées (introduction du caractère retardé) [3] :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (26)$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{q_E}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_E$$

Avec la naissance de la relativité, il devenait évident que la jauge de Coulomb respectait l'invariance par transformation de Galilée alors que la jauge de Lorenz respectait les transformations relativistes de Poincaré-Lorentz [3].

On sait que le choix $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en hydrodynamique reflète le caractère incompressible de l'écoulement. Aussi, pour pouvoir propager des ondes acoustiques, on doit relaxer cette contrainte à l'aide de la relation de continuité hydrodynamique générale [1] :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (27)$$

On développe au premier ordre les différentes grandeurs physiques : $\rho \approx \rho_0 + \delta\rho$, $p \approx p_0 + \delta p$ et $\mathbf{u} \approx \mathbf{0} + \delta\mathbf{u}$. Ceci permet d'évaluer la vitesse des ondes acoustiques :

$$c_s^2 \equiv \frac{1}{\rho\kappa} \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \frac{\delta p}{\delta \rho}$$

où κ est la compressibilité isentropique du fluide.

La contrainte de compressibilité devient alors :

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta p}{c_s^2} \right) \approx \nabla \cdot \delta\mathbf{u} + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0} \right) = 0 \quad (28)$$

On a donc trouvé l'analogie de la jauge de Lorenz en mécanique des fluides (en fait en acoustique). On montre facilement que les équations de propagation des perturbations de pression et de vitesse sont similaires aux équations de propagation des potentiels scalaire et vecteur sous la jauge de Lorenz sans charge ni courant (équations de D'Alembert) :

$$\nabla^2 \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right) = 0$$

$$\nabla^2 \delta\mathbf{u} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \delta\mathbf{u}}{\partial t^2} = 0$$

De ce point de vue, il apparaît que **la jauge de Coulomb n'est pas une jauge** au sens où nous pourrions la choisir sans raison : c'est bien une **contrainte** imposée par la physique. Elle traduit le caractère « incompressible » de l'écoulement du potentiel vecteur et donc la propagation instantanée du potentiel scalaire (caractère galiléen). Pour pouvoir propager le potentiel scalaire à vitesse finie, il faut imposer la contrainte de Lorenz (caractère relativiste).

En hydrodynamique, la propagation de la perturbation de vitesse est indissociable de celle de la perturbation de pression : soit l'écoulement est incompressible et il n'y a pas d'ondes acoustiques, soit l'écoulement est compressible et il y a à la fois des ondes de pression et de vitesse. Il semble que l'électromagnétisme soit moins contraignant. En

effet, si le potentiel scalaire ne se propage pas sous la contrainte **galiléenne** de Coulomb, l'équation du potentiel vecteur demeure une équation de propagation **relativiste** avec un terme source fonction du potentiel scalaire (nous reviendrons sur cette dissymétrie...).

Dans le cadre de l'analogie, on peut donc dire que la mécanique des fluides en écoulement incompressible correspond à l'électromagnétisme galiléen non-linéaire (*cf.* conclusions).

Une autre condition de « jauge », dite « symétrique », caractérise les situations où l'induction **B** est uniforme [3] :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B}}{2} \times \mathbf{r}$$

Dans le cadre de l'analogie, celle-ci s'interprète comme la rotation solide d'un fluide à la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ [1] :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{\omega}}{2} \times \mathbf{r} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$$

En fait, cette « jauge » n'en n'est même pas une car la rotation solide d'un fluide est stationnaire et est donc régie par la contrainte de Coulomb en tant qu'approximation stationnaire de la contrainte de Lorenz.

Nous avons donc montré que les « jauges » sont analogues aux équations de continuité matérielle en hydrodynamique. Or, si l'on fait tendre la célérité du son vers l'infini (en annulant la compressibilité) ou sous l'hypothèse de stationnarité dans la contrainte de compressibilité, on retrouve la contrainte d'incompressibilité qui est donc une approximation. D'une manière générale, la contrainte d'incompressibilité décrit des phénomènes instationnaires sans propagation d'ondes acoustiques, ou des écoulements stationnaires. Si l'on applique ce raisonnement à l'électromagnétisme, la contrainte de Lorenz à la forme d'une équation de continuité électromagnétique dont l'approximation est la contrainte de Coulomb lorsque l'on fait tendre la célérité de la lumière vers l'infini ou sous l'hypothèse de stationnarité.

C'est pourquoi, supposer la jauge de Coulomb dans le cas instationnaire impliquerait qu'on ait fait tendre la célérité de la lumière vers l'infini. L'équation du potentiel vecteur sous la contrainte de Coulomb dans le cas instationnaire :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_E + \frac{1}{c_L^2} \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

devient une équation de propagation instantanée :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}_E \text{ si } c_L \rightarrow \infty$$

Ainsi, la contrainte de Coulomb ne décrit pas seulement les phénomènes stationnaires mais aussi les phénomènes instationnaires sans propagation d'ondes tels que l'induction. De plus, le potentiel vecteur se propage instantanément, comme le potentiel scalaire. Les sources du potentiel vecteur sont les courants, comme les sources du potentiel scalaires sont les charges.

Cette condition se rapproche de ce que l'on appelle habituellement l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) où l'on néglige les phénomènes propagatifs (*cf.* conclusions). Dans ce cadre, la quatrième équation de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_E + \frac{1}{c_L^2} \partial_t \mathbf{E}$$

se réduit à l'équation suivante :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_E = -\nabla^2 \mathbf{A} \text{ si } c_L \rightarrow \infty$$

dont l'analogie hydrodynamique est :

$$\nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{j}_H = -\nabla^2 \mathbf{u}$$

où \mathbf{j}_H est, par définition, le vecteur densité de courant hydrodynamique.

Étant indéterminés, il est d'usage de considérer les potentiels comme des intermédiaires de calculs sans réalité physique. Cependant, si l'on effectue une décomposition de HELMHOLTZ du potentiel vecteur, on constate que l'indétermination des potentiels selon les équations (7) et (8) ne s'applique, en fait, qu'à la partie parallèle du potentiel vecteur ainsi qu'au potentiel scalaire qui seuls pourraient être considérés comme indéterminés. La partie transverse n'étant pas indéterminée a indéniablement une réalité physique. Or, l'effet Aharonov-Bohm prouve la réalité physique de la composante parallèle (cf. plus loin...).

Le lecteur pourra méditer l'exemple suivant. Imaginons une théorie physique décrite par deux quantités physiques (donc déterminés mais à une constante près) l'une vectorielle \mathbf{y} et l'autre scalaire z . Définissons deux champs vectoriels secondaires linéaires par rapport aux quantités primaires \mathbf{y} et z (la question de l'invariance de jauge ne se pose même pas dans le cas non-linéaire) :

$$\mathbf{Y} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{y}$$

$$\mathbf{Z} = \partial_{,i} \mathbf{y} + \nabla z$$

On pourrait définir de nouvelles quantités qui laisseraient \mathbf{Y} et \mathbf{Z} invariants en introduisant une fonction de jauge g :

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \nabla g$$

$$z' = z - \partial_{,i} g$$

Il serait légitime de se poser la question de l'indétermination des grandeurs \mathbf{y} et z si la théorie physique les définissait en tant que quantités secondaires à partir de \mathbf{Y} et \mathbf{Z} en tant que quantités primaires. La question est de savoir si les quantités \mathbf{y} et z ont ou n'ont pas une signification physique.

L'analogie montre clairement que les potentiels ont un sens physique bien qu'ils restent indéterminés à une constante près. Historiquement, le caractère physique des potentiels n'a pas été compris excepté par FARADAY et MAXWELL. L'absence d'attributs physiques des potentiels s'est traduit entre autres par la fausse idée d'une équivalence mathématique entre les différentes jauges ou bien encore la possible existence de monopôles magnétiques...

Il semble donc que les transformations **simultanées** des potentiels qui laissent invariant le champ électromagnétique n'impliquent pas une indétermination réelle des potentiels mais reflètent plutôt une propriété structurelle en électromagnétisme contrairement à la mécanique des fluides : les champs électrique et magnétique sont des fonctions **linéaires** des potentiels. Le lecteur sceptique se reportera à une importante remarque de DE BROGLIE montrant que l'invariance de jauge introduit des paradoxes dans l'application du principe d'inertie de l'énergie ($E = mc^2$) [17].

B. JECH nous a fait remarquer que l'analogie entre les ondes potentielles et les ondes acoustiques posent certains problèmes. En effet, les équations de propagation des ondes acoustiques sont obtenues en linéarisant l'équation de continuité matérielle ainsi que l'équation d'EULER (viscosité nulle et écoulement irrotationnel) qui devient :

$$\partial_t \delta \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right)$$

La propagation acoustique en l'absence de dissipation énergétique est irrotationnelle (la vorticité et le vecteur de Lamb sont nuls), ce qui correspondrait à une propagation des ondes potentielles à champ électromagnétique nul. En particulier, la composante longitudinale du champ électromagnétique pour une onde plane serait nulle (*cf.* plus loin...).

De notre point de vue, ceci montre que la mécanique des fluides (donc l'acoustique) est incapable de décrire complètement l'électromagnétisme de manière analogue. Le vecteur de Lamb est intrinsèquement non-linéaire et s'exprime en fonction de la vorticité. Le champ électrique ne s'exprime pas en fonction du champ magnétique en électromagnétisme sauf dans le cas particulier du champ électrique de Coriolis associé au déplacement dans un champ magnétique. MAXWELL avait aussi fait ce constat en faisant appel à une analogie entre l'élasticité linéaire et l'électromagnétisme pour, d'une part, trouver les équations de propagation du champ électromagnétique analogues aux ondes de cisaillement et, d'autre part, pour pouvoir expliquer le phénomène de polarisation de la lumière qui est une preuve du caractère transverse de la propagation du champ électromagnétique [11].

Néanmoins, on peut montrer que les ondes acoustiques dans un fluide sont longitudinales. Sous la contrainte de LORENZ, les ondes potentielles planes de nombre d'onde k et de pulsation ω sont telles que le champ électromagnétique longitudinal s'annule ($\partial_x [A_x \cos(kx - \omega t)] + \partial_x [V \cos(kx - \omega t)] = 0$) car l'amplitude du potentiel scalaire est liée à l'amplitude de la composante longitudinale du potentiel vecteur par la relation :

$$V = c_L A_x$$

Cette dernière équation s'obtient directement en prenant la transformée de Fourier de la contrainte de Lorenz et en remarquant que les ondes ne sont pas dispersives ($k = \omega / c_L$).

Les composantes transverses et non nulles du potentiel vecteur sont à l'origine du caractère transverse du champ électromagnétique. Le potentiel vecteur sous la contrainte de LORENZ n'est ni purement longitudinal ni purement transverse : il est composite.

Il semble donc que la propagation des ondes lumineuses soit duale : les ondes potentielles longitudinales se propagent suivant les mêmes lois que l'acoustique linéaire avec une célérité constante quel que soit le référentiel ; les ondes potentielles transverses donc les ondes électromagnétiques sont analogues aux ondes de cisaillement de l'élasticité linéaire.

Ainsi, la lumière serait la superposition une onde de condensation et raréfaction accompagnée d'une onde de cisaillement du vide et ces deux types d'ondes se propageraient à la même vitesse ce qui est une très grande différence avec l'élasticité classique car les ondes élastiques longitudinales qui sont analogues aux ondes sonores se propagent à une vitesse différente des ondes élastiques transverses. Le vide serait donc un milieu très particulier...

6. L'EFFET AHARONOV-BOHM

L'effet Aharonov-Bohm illustre l'influence du vecteur électrotonique. Nous empruntons la présentation de FEYNMAN [18] : une source électronique crée des figures d'interférence dans l'expérience des fentes d'YOUNG (dualité onde-corpuscule). Si, derrière et entre les fentes on place un solénoïde parcouru par un courant, celui-ci produit une induction magnétique non nulle dans le solénoïde. Hors du solénoïde, la vorticit e magn etique est nulle mais le potentiel vecteur est non nul et est  egal  a un gradient :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_H = \nabla \left(\frac{\Gamma_{E.M.} \theta}{2\pi} \right) = \frac{\Gamma_{E.M.}}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta$$

La pr esence du sol e-no ide se traduit par une translation de la figure d'interf erence due  a un d ephasage proportionnel  a la circulation $\Gamma_{E.M.}$ du vecteur  electrotonique autour du sol e-no ide : c'est l'effet Aharonov-Bohm  electromagn etique.

Pour une discussion plus d etail ee, le lecteur pourra se reporter  a la quatri eme « variations » de B. JECH [2] qui rappelle les r esultats exp erimentaux de Tonomura avec un tore magn etique (dont l' equivalent est le rond de fum ee en m ecanique des fluides)  a la place du sol e-no ide (dans les deux cas, le domaine est multiplesment connexe).

FEYNMAN utilise l'adjectif « r eel » pour qualifier la nature physique du potentiel vecteur. En effet, pour FEYNMAN un champ r eel est d efini par « un ensemble de nombres que l'on sp ecifie de telle sorte que ce qui arrive en un point d epend uniquement des nombres en ce point. On n'a pas besoin d'en savoir plus sur ce qui se passe en d'autres endroits ». De la m eme mani ere, la circulation du champ  electrique dans les ph enom enes d'induction d epend de la variation temporelle du potentiel vecteur localement tout au long du circuit.

Michael BERRY a r ealis e une exp erience analogue en hydrodynamique avec des ondes de surface [19]. Le groupe de Mathias FINK  a l'ESPCI a observée le m eme effet avec des ondes acoustiques [20]. L'exp erience de FIZEAU pour mesurer la vitesse de la lumi ere dans les fluides en mouvement pourrait être consid er ee comme un analogue optique [21]. Dans les deux exp eriences hydrodynamiques, le sol e-no ide est remplacée par un tourbillon de vidange dont le c oeur est rotationnel mais dont l'influence se fait sentir beaucoup plus loin gr ace au champ de vitesse dans la r egion irrotationnelle.

On a vu que dans un domaine multiplesment connexe, le potentiel des vitesses est multiforme et que sa valeur d epend du chemin suivi. L'onde acoustique subit un d ephasage proportionnel  a la circulation de la vitesse autour du tourbillon car une partie du front d'onde passe d'un c ot e du vortex le long d'un chemin L_1 dans le m eme sens que la vitesse du tourbillon et que l'autre partie du front suit un chemin L_2 en sens contraire de la vitesse. Si on d esigne par φ_1 et φ_2 les valeurs du potentiel des vitesses obtenues en int egrant le long de L_1 et de L_2 , on peut alors  evaluer le d ephasage :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma_H. \quad (29)$$

o u $\Gamma_H = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$ est la circulation calcul ee autour du tourbillon.

On remarquera, en conclusion, la coexistence des deux contraintes de COULOMB (d'incompressibilit e) et de LORENZ (de compressibilit e) qui s'appliquent  a des ph enom enes de nature diff erente : le sol e-no ide (le tourbillon) et l'onde lumineuse (acoustique).

7. LES TOURBILLONS SUPRACONDUCTEURS ET SUPERFLUIDES

Une correspondance très spectaculaire entre électromagnétisme et hydrodynamique est fournie par l'étude des superfluides chargés (supraconducteurs) ou non (hélium 4 et 3). Elle a été utilisée très longuement par les spécialistes de ces domaines qui ont souvent, comme l'un d'entre nous (E.G.) a eu l'occasion de le faire, travaillé dans l'un et l'autre domaine en faisant appel aux analogies, similarités et différences entre les deux problèmes.

Rappels :

En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger décrit l'évolution de la fonction d'onde associée à un électron de masse m dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi$$

En 1926, Madelung a proposé de résoudre cette équation en injectant la solution particulière [22] :

$$\Psi = \sqrt{\rho_Q} \exp(i \frac{\phi}{\hbar})$$

Les deux inconnues ρ_Q et ϕ sont solutions des équations « hydrodynamiques » suivantes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2(\sqrt{\rho_Q})}{\sqrt{\rho_Q}} \quad \text{Relation de Bernoulli quantique}$$

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_Q \frac{\nabla \phi}{m}) = 0 \quad \text{Équation de continuité quantique}$$

On peut définir une vitesse et une impulsion correspondante :

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla \phi}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

Le lecteur généralisera aisément cette formule en présence d'un potentiel vecteur.

En 1935, les frères LONDON ont utilisé l'analogie entre la vitesse et le potentiel vecteur pour expliquer la supraconductivité. L'état supraconducteur est l'état qu'acquiert un matériau à basse température et qui est caractérisé par une fonction d'onde quantique macroscopique. Le matériau est constitué de « deux fluides », l'un normal et l'autre superfluide. Les entités (paires d'électrons dites de COOPER de charge q_s et de masse m_s doubles de celles d'un électron seul) qui composent la fraction supraconductrice sont dans le même état quantique dont toute l'information est contenue dans la fonction d'onde

($\hbar = \frac{h}{2\pi}$ où h est la constante de PLANCK) :

$$\Psi = \sqrt{\rho_S} \exp(i \frac{\phi}{\hbar}) \tag{30}$$

où ρ_S est la densité de paires de Cooper et $\frac{\phi}{\hbar}$ la phase de la fonction d'onde.

Le vecteur densité de courant « superfluide » s'exprime par le produit de la charge effective et de la vitesse des paires :

$$\mathbf{j}_S = \rho_S q_s \mathbf{v}_S$$

Une caractéristique importante de la supraconductivité est l'effet MEISSNER, découvert en 1933, qui consiste en l'expulsion de l'induction magnétique par la création de courants d'induction permanents faisant écran à la pénétration de l'induction magnétique externe.

L'état supraconducteur est un état cohérent des porteurs de charges dont le niveau d'énergie fondamental se caractérise par la nullité de l'impulsion généralisée en l'absence de champ (théorème de Bloch). Si l'on postule que la fonction d'onde de l'état fondamental est rigide et ne peut acquérir d'impulsion lorsque l'on applique un champ :

$$\mathbf{p} = m_s \mathbf{v}_s + q_s \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ quel que soit } \mathbf{B}$$

$$\mathbf{v}_s = -\frac{q_s}{m_s} \mathbf{A}$$

On en déduit alors l'équation phénoménologique de F. & H. LONDON [23] :

$$\mathbf{j}_s = -\frac{\rho_s q_s^2}{m_s} \mathbf{A} \quad (31)$$

On peut montrer, grâce à cette équation, que l'induction magnétique pénètre sur une faible distance λ_s , appelée profondeur de pénétration, en s'annulant exponentiellement à l'intérieur du matériau supraconducteur. En pratique, l'induction est nulle dans le volume supraconducteur si le champ extérieur n'est pas trop élevé.

Pour les supraconducteurs de type II (pour lesquels la longueur de pénétration est plus grande que la longueur de corrélation qui mesure la taille du cœur du vortex) et au-delà d'une valeur critique du champ, celui-ci pénètre sous la forme d'un réseau périodique triangulaire de vortex supraconducteurs dont l'axe est parallèle à l'induction externe.

Note : Pour les supraconducteurs de type I - ou de première espèce -, la supraconductivité disparaît complètement par une transition du premier ordre pour une valeur du champ critique lié à l'énergie de condensation de paires.

La contrainte de Coulomb/London (incompressibilité : $\rho_s = \text{constante}$) impose :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = 0$$

Un supercourant circule donc autour du cœur normal de chaque tourbillon et assure l'annulation du champ sur une distance λ_s . En dehors du cœur du vortex, l'écoulement du potentiel vecteur est irrotationnel.

Le flux correspondant à un vortex est quantifié (condition de quantification de Bohr-Sommerfeld pour la circulation qui est une variable action [15]), ce qui montre que la supraconductivité est une manifestation macroscopique de la physique quantique.

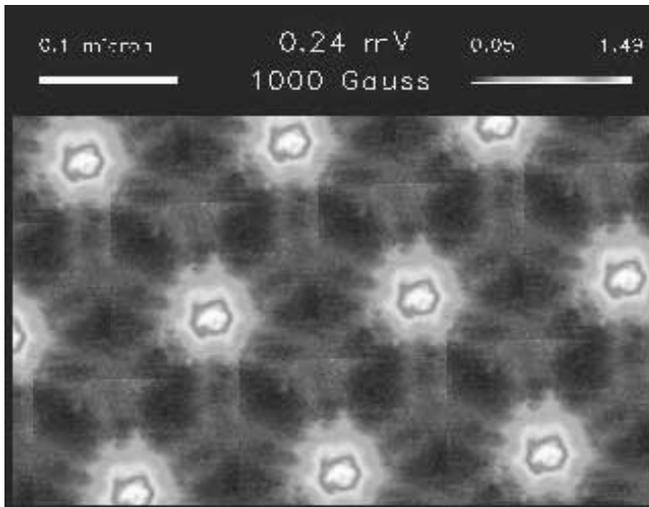


Figure 3 : Réseau de Vortex d'Abrikosov observé par microscopie tunnel sur le composé NbSe₂.
D'après H. HESSE et al., Phys. Rev. Lett., 62, 214 (1989).

La superfluidité dans l'hélium est l'analogue de la supraconductivité de deuxième espèce. L'hélium 3 ou 4 devient superfluide à suffisamment basse température et peut être analysé dans un modèle à deux fluides, l'un normal et l'autre superfluide. De la même manière que la résistance électrique d'un supraconducteur s'annule en dessous d'une température critique, la composante superfluide s'écoule sans viscosité dans des tubes capillaires. Les atomes d'hélium 3 s'apparient comme les électrons des paires de Cooper pour former des bosons (en effet, ce sont des fermions contrairement aux atomes d'hélium 4 qui sont déjà des bosons). Les atomes d'hélium 3 et 4 sont caractérisés par une fonction d'onde macroscopique ainsi que par l'incompressibilité de l'écoulement de la composante superfluide. Comme pour l'effet MEISSNER, un superfluide s'oppose à sa mise en rotation dans un récipient tournant à faible vitesse angulaire (la composante normale tourne en rotation solide). Lorsque celle-là dépasse un certain seuil, qui correspond au champ de première pénétration des supraconducteurs, un réseau périodique triangulaire de vortex superfluides parallèles à l'axe de rotation apparaît et tourne à la même vitesse que le récipient (le flux des vortex est aussi quantifié). La vitesse hors du cœur des vortex est [1] :

$$\mathbf{v}_s = \frac{\nabla\phi}{m} \text{ donc } \nabla \times \mathbf{v}_s = 0$$

La pénétration de la rotation dans les phases de l'hélium a directement été observée dans les expériences élégantes de R. PACKARD & G. WILLIAMS décrite dans la référence [1, Chap. 7 (Annexe)]. Dans ces deux derniers exemples, on retrouve bien l'analogie entre l'induction (le potentiel vecteur) et la vorticité (la vitesse). La jauge de Coulomb s'interprète alors comme une condition d'incompressibilité.

8. VARIATIONS HISTORIQUES SUR LE MODÈLE MÉCANIQUE DE MAXWELL

L'analogie de MARMANIS que nous avons étendue au cas ondulatoire est très semblable dans l'esprit et parfois mathématiquement aux analogies utilisées par MAXWELL dans sa formulation originelle de l'électromagnétisme en 1861 [11, 24 & 25]. Il avait en particulier compris le sens des potentiels scalaire et vecteur comme étant analogue à une pression et à une impulsion.

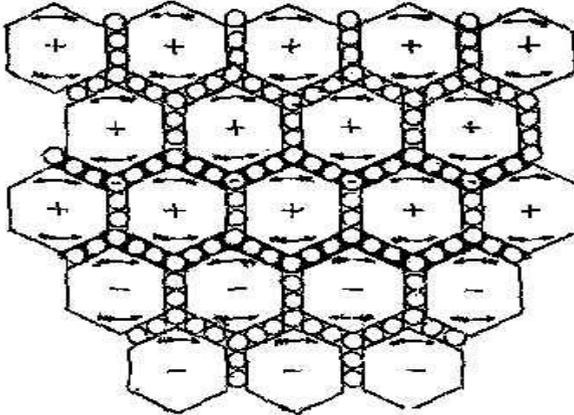


Figure 4 : Le modèle mécanique de Maxwell.

MAXWELL pensait que tout milieu où des phénomènes électromagnétiques se produisaient était constitué d'un réseau périodique triangulaire de « vortex moléculaires » incompressibles tournant dans le même sens. Il comparait la pénétration de l'induction magnétique dans un milieu à la mise en mouvement de grandes roues dentées représentées par les vortex moléculaires. Or, pour que les roues puissent tourner dans le même sens, il faut nécessairement envisager l'existence d'un mécanisme connectant les vortex et propageant la rotation. MAXWELL imagine la présence de petites billes entre les vortex qui jouent le rôle de pignons. Du fait de l'incompressibilité, ceux-ci se dilatent perpendiculairement à leur axe de rotation lorsqu'ils sont mis en mouvement et ainsi se connectent *via* les billes. Ces dernières tournent en sens opposé aux vortex et peuvent se translater dans un conducteur lorsque les vitesses de deux vortex voisins sont différentes : c'est le phénomène d'induction magnétique par création d'un courant électrique (de petites billes) qui s'oppose à la pénétration de la rotation (induction) que MAXWELL modélise par l'équation d'Ampère sans le courant de déplacement. Réciproquement, une différence de pression (potentiel scalaire) met le fluide électrique en mouvement qui induit une rotation des vortex (induction).

Il calcule que le couple exercé par les forces tangentielles (électriques) agissant sur la surface des vortex est égal à la variation de leur vitesse angulaire (induction) : c'est l'équation de FARADAY.

Le lecteur notera la puissance du modèle mécanique de MAXWELL qui suggère, dans sa version de base, le phénomène d'écrantage de la supraconductivité. En effet, l'impulsion des petites billes s'oppose à l'impulsion des grandes roues :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ donc } \nabla \cdot \mathbf{j}_E = 0 \text{ car } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Dans le cadre de ce modèle mécanique, MAXWELL a choisi une géométrie triangulaire pour le réseau et hexagonale pour les vortex ce qui « optimise » le transfert de la rotation et la translation des petites billes. MAXWELL n'autorise qu'une dissipation liée au dégagement de chaleur associé au passage des billes d'un vortex à l'autre, aux défauts du réseau ou à la présence d'impuretés dans les canaux où s'écoulent les petites billes : on retrouve qu'un courant n'engendre pas de dissipation dans un réseau parfait sans impuretés et donc les différentes causes de diminution de la conductivité électrique.

Cependant, MAXWELL était gêné par le caractère solénoïdal de la densité de courant dans son modèle initial car il savait que celle-ci était solution de l'équation de conservation plus générale faisant intervenir la densité de charge (équation de continuité) [3] :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_E + \frac{\partial q_E}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

MAXWELL connaissait l'équation de Gauss. Il essaye donc de relier celle-ci à l'équation d'Ampère qui modélise le courant électrique : c'est grâce à une intuition extraordinaire qu'il envisage la possibilité que les vortex soient doués d'« élasticité » dans le vide et les isolants et que le mouvement des petites billes (une simple rotation dans les isolants) puisse déformer les vortex qui en réaction engendrent l'équivalent d'un courant supplémentaire des billes : c'est le fameux « courant de déplacement » qui correspond au phénomène de polarisation (déformation du nuage électronique) dans les isolants.

C'est le courant de déplacement du vide qui a permis à MAXWELL de trouver les équations de propagation des ondes électromagnétiques analogues aux ondes élastiques transverses. En effet, on peut montrer que l'équation de continuité en élasticité relie la divergence du déplacement relatif ζ d'un point d'un solide élastique à une variation d'un volume matériel infinitésimal $\delta\tau$:

$$\nabla \cdot \zeta \approx \frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau} \approx -\frac{d(\delta\rho)}{\rho_0}$$

Cette équation est analogue à la contrainte de compressibilité en hydrodynamique :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Ce qui montre une analogie due à NAVIER entre la vitesse d'une particule fluide et le déplacement en un point d'un solide élastique et que MAXWELL a utilisé implicitement pour palier l'insuffisance de l'analogie entre l'hydrodynamique et l'électromagnétisme pour expliquer la propagation des ondes électromagnétiques. Il a été guidé par THOMSON qui avait identifié le champ magnétique au rotationnel du déplacement relatif, comme le rappelle B. JECH dans sa première « variation » [2].

MAXWELL postule que le déplacement du vide est proportionnel à la force électrique *via* la permittivité comme le déplacement d'un solide est proportionnel à la contrainte *via* un module élastique. La célérité de l'onde électromagnétique s'exprime en fonction du module de cisaillement du milieu élastique G (l'inverse de la permittivité du vide) et de la densité de vortex moléculaires ρ (la perméabilité du vide) ce qui est un résultat classique pour une onde de cisaillement transverse en élasticité $\left(c_T^2 \equiv \frac{G}{\rho} \right)$. Pour une vision moderne de l'analogie avec l'élasticité, le lecteur pourra se reporter aux références [26-27].

CONCLUSIONS

Cette nouvelle visite du grand sujet de l'électromagnétisme, après tant d'autres et à la suite de la série d'articles récents publiés par B. JECH dans le même journal [2], si elle n'entretient pas de prétention historique, témoigne de l'importance du retour aux sources (même si la lecture des textes originels est compliquée par l'absence de notation vectorielle). En effet, le recours à la correspondance avec la mécanique (l'éther, les vortex moléculaires) a été à l'origine de la compréhension et de l'écriture des équations de l'électromagnétisme. Dans le même temps, HELMHOLTZ qui cherchait alors à comprendre le fonctionnement des tuyaux sonores a écrit les équations de la vorticité en utilisant la correspondance entre la vorticité en mécanique des fluides et le magnétisme des courants, dans une analogie classique dont nous avons montré les limites [5]. C'est   une correspondance renouvelée, faisant écho   celle de B. JECH mais centrée sur le problème hydrodynamique, que nous nous sommes attachés. Tout comme B. JECH et de nombreux autres auteurs récents, suivant en cela FEYNMAN, nous avons voulu dégager l'importance du potentiel vecteur et de son sens intrinsèque, alors même qu'il a été abandonné après son introduction comme étant un artifice mathématique pour le calcul des champs.

Nous n'avons certainement pas élucidé tous les problèmes soulevés par l'analogie et nous encourageons le lecteur   y réfléchir   partir des quelques remarques et questions suivantes. En particulier, les équations de MAXWELL sont dites invariantes par transformation de POINCARÉ-LORENTZ. Or, les équations de NAVIER-STOKES sont invariantes par transformation de GALILÉE. Cependant, les deux premières équations de Maxwell sont invariantes par transformation de GALILÉE. Ce sont en fait les équations de propagation du champ électromagnétique qui sont invariantes par transformation de POINCARÉ-LORENTZ avec l'hypothèse que la vitesse de la lumière est constante quel que soit le référentiel.

Pour passer des équations de MAXWELL   l'approximation des régimes quasi-stationnaires utilisée dans les conducteurs ohmiques ou en magnétohydrodynamique, nous avons fait tendre la célérité de la lumière vers l'infini sans autres précisions. Il est peu connu que LE BELLAC & LEVY-LEBLOND ont étudié ce que serait la limite galiléenne des équations de Maxwell [28]. Ils ont montré qu'il existait deux limites galiléennes de l'électrodynamique relativiste. La première, dite limite magnétique, consiste   faire tendre la célérité de la lumière vers l'infini en maintenant fixe la perméabilité du vide. La deuxième, dite limite électrique, consiste   faire tendre la célérité de la lumière vers l'infini en maintenant fixe la permittivité du vide et en redéfinissant le champ magnétique $B' = c^2 B$. Cette dernière limite est utilisée, par exemple, en électrohydrodynamique [29]. La mécanique des fluides en écoulement incompressible où l'on fait tendre la compressibilité vers zéro correspond   la limite magnétique où l'on fait tendre la permittivité vers zéro. Ainsi, la permittivité du vide serait   la fois un coefficient de compressibilité acoustique (cas des fluides) et l'inverse d'un coefficient de rigidité élastique (cas des solides). La perméabilité du vide serait une sorte de densité ce que l'on comprend expérimentalement très bien en visualisant les lignes de champ magnétiques qui sont concentrées par un aimant dont la perméabilité est plus grande que celle du vide. Précisons pour terminer que l'ARQS n'est pas équivalente   la limite magnétique [28].

La vitesse d'un fluide dépend de l'espace et du temps : il semble bien que ce soit plutôt la vitesse du son qui soit l'analogue de la vitesse de la lumière. Ce sont les perturbations qui se propagent en hydrodynamique alors qu'en électromagnétisme ce sont les champs de base. Nous avons montré que ce sont les équations linéarisées de l'acoustique qui sont analogues aux équations de propagation des potentiels sous la contrainte de LORENTZ sans charge ni courant. Par ailleurs, l'équation de GAUSS est plus compliquée en hydrodynamique   cause de la non-linéarité.

En outre, nous avons vu que le potentiel vecteur était analogue à la vitesse des particules fluides : néanmoins, qu'est-ce qui s'écoule en électromagnétisme ? De plus, les ondes acoustiques se propagent en perturbant le fluide *via* le champ de pression : le potentiel scalaire est-il un champ caractéristique (une pression électrique ?) d'un milieu sous-jacent (qu'évoquait le concept d'éther lumineux introduit en physique par NEWTON au XVII^e siècle puis repris au XIX^e siècle en outre par FRESNEL [25]) dans lequel se propagent les ondes potentielles ?

Concernant l'éther, le lecteur pourra se reporter à une conférence d'EINSTEIN de 1920 [30] où celui-ci a exposé ses vues sur l'éther qu'il avait qualifié de « superflu » pour expliquer la relativité restreinte. Or, son interprétation de la relativité générale l'avait amenée à penser comme NEWTON que la gravitation serait une sorte de déformation d'un milieu et donc à ressusciter l'éther d'une certaine manière. DIRAC, un autre prix Nobel pour ses travaux sur l'électrodynamique quantique, avait de nouveau posé la question de l'existence de l'éther (c'est-à-dire du vide doué de propriétés physiques) dans un article dans la prestigieuse revue *Nature* en 1951 [31] où il avait, lui aussi, identifié la vitesse de l'éther au potentiel vecteur [32] en expliquant que notre incompréhension de l'électrodynamique quantique (qui s'exprime en fonction uniquement des potentiels) était (est ???) liée au fait que les potentiels n'avaient pas d'interprétation physique en électrodynamique classique...

À la lecture de cette analogie, la question de l'existence de l'éther peut être reposée [33-34] et le lecteur méditera la définition qu'en donnaient les physiciens au XIX^e siècle (Petit Larousse Illustré) : « Fluide hypothétique, subtil, impondérable, élastique que l'on regardait comme l'agent de transmission de la lumière, de l'électricité, du magnétisme, de la chaleur et qui remplissait selon les anciens les espaces situés au-delà de l'atmosphère terrestre ».

Le lecteur attentif fera justement remarquer que seuls les champs et non les potentiels sont mesurables par des dispositifs expérimentaux. Il est indiscutable que les potentiels sont indéterminés à une constante près. Cependant, la mesure de la vitesse d'un électron en sortie d'un canon à électrons nous renseigne sur la différence de potentiel. Le physicien expérimentateur choisit alors un potentiel de référence qu'il peut annuler. De la même manière, le chimiste expérimentateur choisit un couple rédox de référence pour fabriquer une pile. Le champ électrique créé par une variation spatiale du potentiel scalaire est d'origine différente d'un champ électrique créé par une variation temporelle du potentiel vecteur. Rien n'empêche de penser que l'on soit capable de mesurer un potentiel vecteur localement par rapport à une origine que le physicien se fixe par convention. Tout ce que l'on peut dire, c'est que l'effet Aharonov-Bohm est une preuve de l'influence locale du potentiel vecteur. Cependant, il est vrai que nous n'avons accès expérimentalement qu'au déplacement des franges d'interférence et donc qu'au déphasage qui est proportionnel à la circulation du potentiel vecteur qui est une grandeur globale et pas locale. Néanmoins, KONOPINSKI [35] et ONOCHIN [36] ont proposé des expériences inspirées de l'effet Aharonov-Bohm pour mesurer le potentiel vecteur dans le cadre de l'électrodynamique classique : avis aux expérimentateurs...

Nous n'avons pas non plus discuté de l'existence de termes dissipatifs dans les équations de Maxwell. Cette possibilité est examinée dans d'autres publications [13-14]...

Nous aimerions conclure cet article par quelques réflexions sur l'enseignement et les difficultés qui peuvent être rencontrées dans l'application des notions présentées dans cet article. L'enseignement secondaire actuel ignore essentiellement la mécanique des fluides. Or, celle-ci se prête à des observations et des expérimentations simples. Elle

permet d'introduire de façon concrète et imagée les notions de flux, de bilans, d'effets de rotation sur les milieux fluides. Plus tard, lorsque les notions de gradient, divergence, rotationnel sont introduites à l'université ou en classe préparatoire, un éclairage physique préalable permet qu'elles ne soient pas simplement définies en termes d'opérateurs mathématiques. Il sera alors possible d'établir, comme nous nous sommes efforcés de le faire, des correspondances avec l'électromagnétisme où les notions d'opérateurs sont aussi difficilement traduits en termes concrets.

Par ailleurs, le chapitre de la vorticité avec ces prolongements sur les écoulements en rotation et la turbulence (que nous avons développé dans deux chapitres de la nouvelle version du livre « Hydrodynamique physique ») est malheureusement peu présent encore dans les enseignements universitaires pour physiciens malgré son importance fondamentale et les très nombreuses applications dans l'étude des phénomènes naturels ou les procédés. Des notions simples de base utilisant le tourbillon peuvent être aisément introduites   ce niveau.

REMERCIEMENTS

Le premier auteur souhaite remercier vivement Haralambos MARMANIS et Mario LIU qui sont les initiateurs par leurs écrits et par de nombreuses correspondances épistolaires des quelques idées disparates exposées dans cet article. Les contacts directs établis avec Bruno JECH nous ont été aussi très fructueux. Nous remercions Olivier DARRIGOL pour nous avoir rappelé les travaux de HELMHOLTZ lors d'un séminaire d'Histoire des Sciences au LPMMH. Les collègues de l'ESPCI et de l'ENS ont été exploités sans retenue et en sont donc remerciés. Les correspondances postales ou électroniques doivent être adressées au premier auteur : germain@pmmh.espci.fr

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GUYON E., HULIN J.-P. et PETIT L. *Hydrodynamique physique*. Deuxième  dition, InterEditions / CNRS  ditions, 2001.
- [2] JECH B. Variations sur le potentiel vecteur I, II, III, IV, V et VI. Cahier Enseignement Supérieur du *Bulletin de l'Union des Physiciens*. juin 1999, n  815 (2) : I (p. 163-190) et II (p. 191-206) ; janvier 2001, n  830 (2) : III (p. 67-83), IV (p. 85-101), V (p. 103-127) et VI (p. 129-140).
- [3] JACKSON J.D. *Classical electrodynamics*. Third edition, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [4] JACKSON J.D. et OKUN L.B. Historical roots of gauge invariance. *Reviews of Modern Physics*, July 2001.
- [5] DARRIGOL O., From organ pipes to atmospheric motions : Helmholtz on fluid mechanics. *Historical Studies of Physical Sciences*, 1998, 29 : 1.
- [6] MARMANIS H. Analogy between the Navier-Stokes equations and Maxwell's equations : Application to turbulence. *Physics of Fluids*, 1998, vol. 10, n  6, p. 1428-1437.
- [7] SHRIDAR S. Turbulent transport of a tracer : an electromagnetic formulation. *Physical Review E*, 1998, vol. 58, n  1, p. 522-525.
- [8] BHADURI R.K. et SHUXI L. Classical vortices and quantum anyons : an analogy. *Physical Review B*, 1992, vol. 45, n  21, p. 12584-12587.

- [9] MOREAU R. *Magnetohydrodynamics*, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [10] WU J., ZHOU Y., LU X. et FAN M. Turbulent force as a diffusive field with vortical sources. *Physics of Fluids*, 1999, vol. 11, n° 3, p. 627-635.
- [11] CLERK MAXWELL J. *On Physical Lines of Force*. W.D. Niven, ed., The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, 2 vols., tome 1, p. 451-513, New York, 1890.
- [12] MOFFATT H.K. Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. *Journal of Fluid Mechanics*, 1985, vol. 159, p. 359-378.
- [13] ROUSSEAUX G. Les équations de Maxwell sont-elles incomplètes ? *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 2001, vol. 26, n° 1, p. 73-81.
<http://www.ensmp.fr/aflb/AFLB-261/ablb261p073.htm>
- [14] LIU M. Hydrodynamic Theory of Electromagnetic Fields in Continuous Media. *Physical Review Letters*, 1993, vol. 70, n° 23, p. 3580-3583.
- [15] BONVALET M. *Les principes variationnels*. Masson, 1993.
- [16] HUERRE P. *Mécanique des fluides*. Édition 2000, Tome 1, Cours de l'École polytechnique.
- [17] DE BROGLIE L. *Diverses questions de mécanique et de thermodynamique classiques et relativistes*. Springer, 1995, Fin du Chap. 3.
- [18] FEYNMAN R., LEIGHTON R. et SANDS M. The Feynman Lectures on Physics, 1964, vol. 2, p. 15-7/15-14, Addison Wesley, Reading, Ma.
- [19] BERRY M.V., CHAMBERS R.G., LARGE M.D., UPSTILL C. et WALMSLEY J.C. Wavefront dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water-wave analogue. *European Journal of Physics*, 1980, n° 1, p. 154-162.
- [20] ROUX P., DE ROSNY J., TANTER M. et FINK M. The Aharonov-Bohm effect revisited by an acoustic time-reversal mirror. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 79, n° 17, p. 3170-3173.
- [21] LEONHARDT U. et PIWNICKI P. Light in moving media. *Contemporary Physics*, 2000, vol. 41, n° 5, p. 301-308.
- [22] MADELUNG E. Quantum theory in a hydrodynamical form. *Z. Phys.*, 1927, vol. 40, p. 322-326.
- [23] LEVY L.P. *Magnétisme et supraconductivité*. InterEditions / CNRS Éditions, 1997.
- [24] DARRIGOL O. *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford University Press, 2000.
- [25] MAITTE B. *La Lumière*. Points Sciences, Editions du Seuil, 1981.
- [26] KARLSEN B.U. *The Linear Theory of Elasticity compared with The Theory of Electrodynamics*. 2001.
<http://home.online.no/~ukarlsen>
- [27] CARCIONE J.M. On energy definition in electromagnetism : an analogy with viscoelasticity, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1999, 105 (2), p. 626-632.
- [28] LE BELLAC M. et LEVY-LEBLOND J.-M. Galilean Electromagnetism. *Il Nuovo Cimento*, 1973, vol. 14B, n° 2, 11 Aprile, p. 217-233.
- [29] MOREAU R. *Électrohydrodynamique, Dynamique des Fluides*. Ed. R. Balian et J.L. Peube, Les Houches, Juillet 1973, Gordon and Breach Science Publishers.

- [30] EINSTEIN A. L'éther et la théorie de la relativité. Conférence à l'université de Leyde. 5 mai 1920, Paris : Gauthier-Villars, 1972.
http://www.tu_harburg.de/rzt/rzt/it/Ether.html
- [31] DIRAC P.A.M. Is there an Aether ? *Nature*, 1951, 168, p. 906-907.
- [32] CASER S. Electrodynamics in Dirac gauge : a geometrical equivalence. *Foundations of Physics Letters*, 2001, vol.14, n° 3, p. 263-274.
- [33] WILCSEK F. Reference Frame : The Persistence of Ether. *Physics Today, January 1999*, p. 11-13.
- [34] Ouvrage Collectif. Le vide, Univers du tout ou rien. Édité par Edgard Gunzig et Simon Diner, 1997, Revue de l'Université de Bruxelles, Éditions complexe.
- [35] KONOPINSKI E.J., What the vector potential describes. *Am. J. Phys.*, 1978, 46 (5), p. 499-502.
- [36] ONOCHIN V. A proposed experiment of direct detecting of the vector potential within classical electrodynamics. *Journal of Radioelectronics*, 2000, n° 10.
http://jre.cplire.ru/jre/oct00/8/text_e.html
<http://fr.arXiv.org/abs/physics/0111017>